Macroeconomics I

柳本和春

最終更新: 202626 年 01 月 14 日

Table of contents

Syllabus

本レクチャーノートの内容は, 第 1 章の RBC モデルは Azzimonti et al. (2025) の Chapter 14, 第 2 章のニューケインジアンモデルは Ascari and Rossi (2012) および Galí (2015) の Chapter 3, 第 3 章の DMP フレームワークは Azzimonti et al. (2025) の Chapter 20 を主な参考文献として作成されている. 講義は Website 版を用いて行われるが, この PDF 版も必要に応じて利用すると良い. ただし, 頻繁に更新される可能性があるため最終更新日等を注意すること.

第 1 章

Real Business Cycle Model

1.1 Real Business Cycle (RBC) Model とは

Real Business Cycle (RBC) モデルとは, 経済のビジネスサイクルを説明するためのマクロ経済学のモデルです. RBC モデルは, 経済の変動が主に技術的な要因や生産性の変化によって引き起こされると仮定しています.

- **Real**: 貨幣や他の名目変数を考慮しない
- **Business Cycle**: 長期的なトレンド (成長) と短期的な変動を考慮する

これまで学んだ Ramsey モデルでも, 貨幣や名目変数を考慮しない, つまり Real なモデルでした. また, Ramsey モデルでも, 生産性 (TFP) の成長を考慮していました. RBC モデルでは, TFP の成長を確率的なもの (stochastic) なものとして考えます. まとめると以下のようになります.

$$\text{RBC Model} = \text{Ramsey Model} + \text{Stochastic TFP}.$$

RBC モデルへの主要な貢献に対して Kydland と Prescott が 2004 年にノーベル経済学賞を受賞しています (図 1.1).

1.2 Stylized Facts

1.2.1 トレンドとサイクル

Lucas (1977) や Kydland and Prescott (1982) は景気循環を**トレンド**と**サイクル**に分けて考えることを提案しました. トレンドは長期的な成長を表し, サイクルは短期的な変動を表します.

図 1.2 のように景気循環とは, 成長トレンドの周りに Peak と Trough を持つ波のような動きととらえます. 特に, Peak から Trough までの期間を**不景気** (recession) と呼び, Trough から Peak までの期間を**好景気** (boom, expansion) と呼びます.

例えば, アメリカの実質 GDP の時系列データを見てみましょう (図 1.3). アメリカの実質 GDP は成長傾向をもちながらも短期的な変動を繰り返しています. 特にグレーの部分は不景気を示しており, National Bureau of Economic

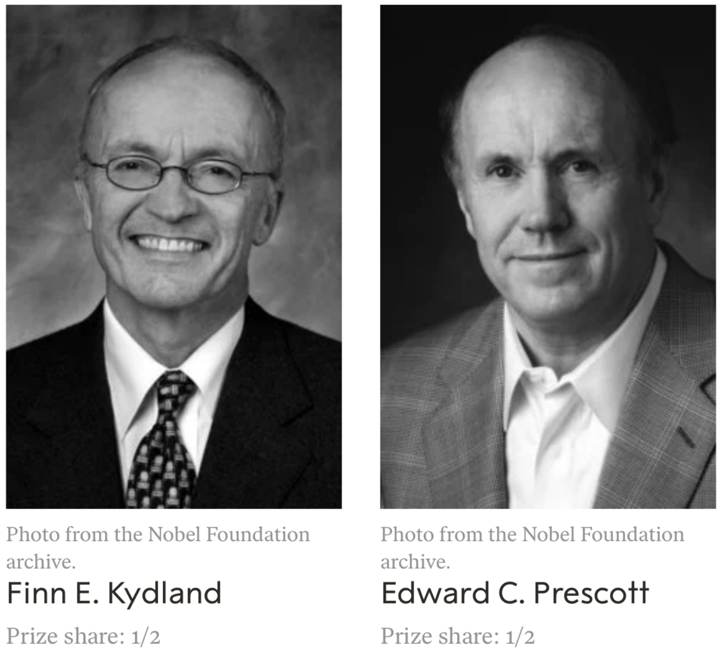


図 1.1: Nobel Prize in Economic Science 2004.

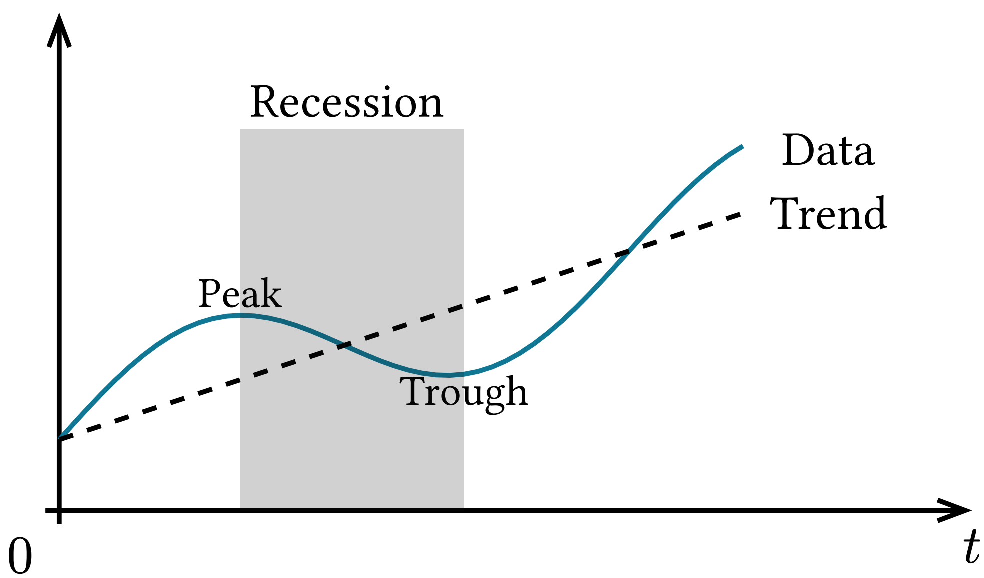


図 1.2: Stylized Representation of Business Cycle

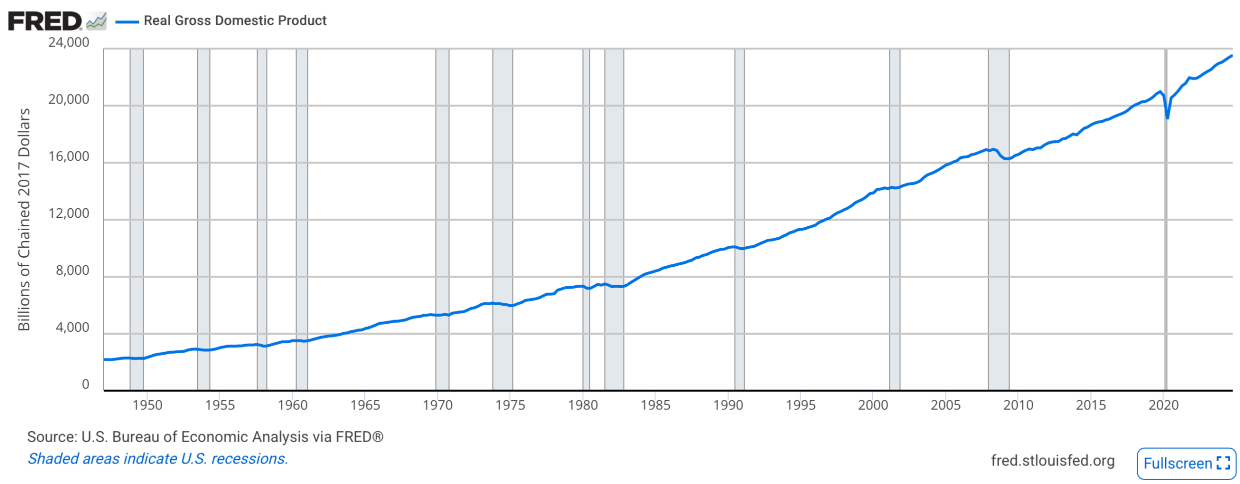


図 1.3: U.S. Bureau of Economic Analysis, Real Gross Domestic Product GDPC1.

Research (NBER) の Business Cycle Dating Committee が様々な経済指標を用いて, アメリカが不景気にあるかを定義しています.

1.2.2 Hodrick and Prescott Filter

Hodrick-Prescott (HP) フィルターは, 時系列データからトレンド成分とサイクル成分を分離するための手法です.

Hodrick and Prescott Filter

時系列データ $\{Y\}_{t=0}^{T}$ に対して, HP フィルターは以下の最適化問題を解くことでトレンド成分 $\{\tau_t\}$ を求める.

$$\min_{\{\tau_t\}} \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \tau_t)^2 + \lambda \left[\sum_{t=2}^{T-1} \left((\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1}) \right)^2 \right] \tag{1.1}$$

ここで平滑化パラメータ λ は四半期データなら 1600, 年次データなら 100 が一般的に用いられる.

直感的にはある程度スムーズなトレンド成分を求めるために, トレンド成分の符号の反転に大きくペナルティを欠けているというイメージです. 図 1.4 を見ると, 符号が反転するような τ_t の取り方はペナルティが大きくなり, そのような τ_t が選ばれにくいことがわかります.

一方で, 図 1.5 は, 符号が反転しにくい τ_t の取り方はペナルティが小さくなり, そのような τ_t が選ばれやすいことを示しています. 今回の例では, y_t が上昇傾向にあるように見えるので, 一定のペースで上昇するような τ_t が選ばれやすくなっています.

この異符号に対する大きなペナルティは, 式 1.1 のペナルティ項を展開して見ると違いがよく分かります.

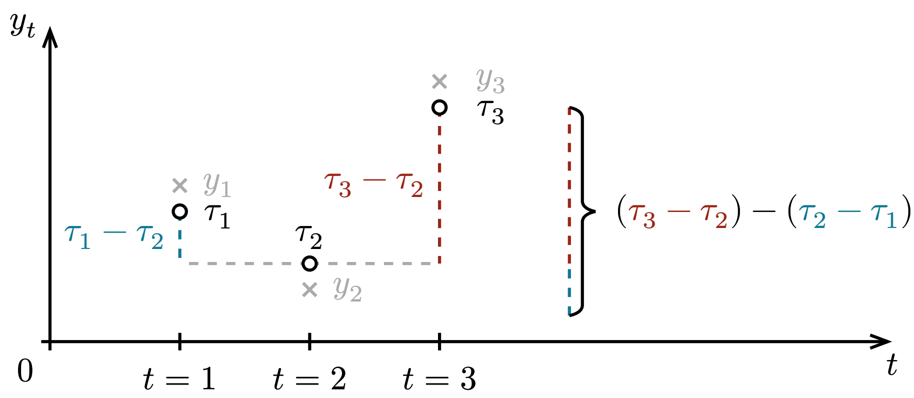


図 1.4: Example of Large Penalty in HP Filter

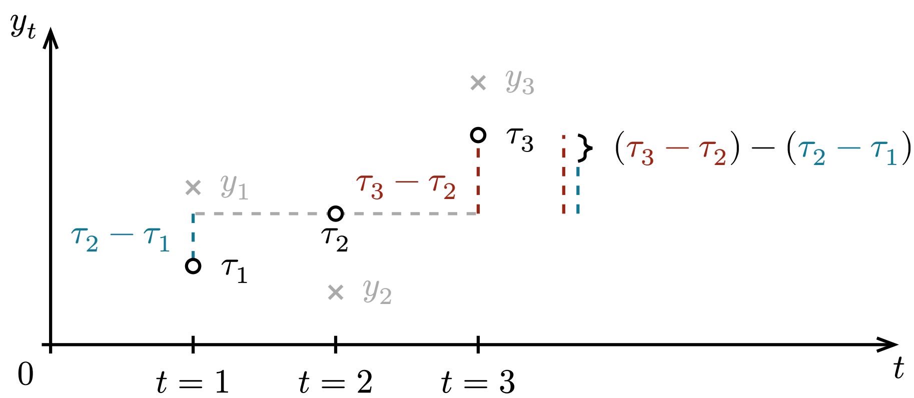


図 1.5: Example of Small Penalty in HP Filter

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=2}^{T-1} \left((\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})\right)^2 \\
&= \sum_{t=2}^{T-1} (\tau_{t+1} - \tau_t)^2 + \sum_{t=2}^{T-1} (\tau_t - \tau_{t-1})^2 - 2 \sum_{t=2}^{T-1} (\tau_{t+1} - \tau_t)(\tau_t - \tau_{t-1}) \\
&= \underbrace{(\tau_T - \tau_{T-1})^2 + 2 \sum_{t=2}^{T-1} (\tau_t - \tau_{t-1})^2}_{\text{Penalty for large difference}} \underbrace{- 2 \sum_{t=2}^{T-1} (\tau_{t+1} - \tau_t)(\tau_t - \tau_{t-1})}_{\text{Penalty for sign change}} .
\end{aligned}
$$

最初の項は, トレンド成分の変化が大きい場合にペナルティを課すものであり, 2 番目の項はトレンド成分の符号が反転する場合にペナルティを課すものです. そのため, 符号が反転しにくいようなトレンド成分が選ばれやすくなります.

HP Filter の実践

図 1.6 は, アメリカの実質 GDP の時系列データに HP フィルターを適用した結果です. Julia では, `QuantEcon.hp_filter` 関数を用いて HP フィルターを適用できます.

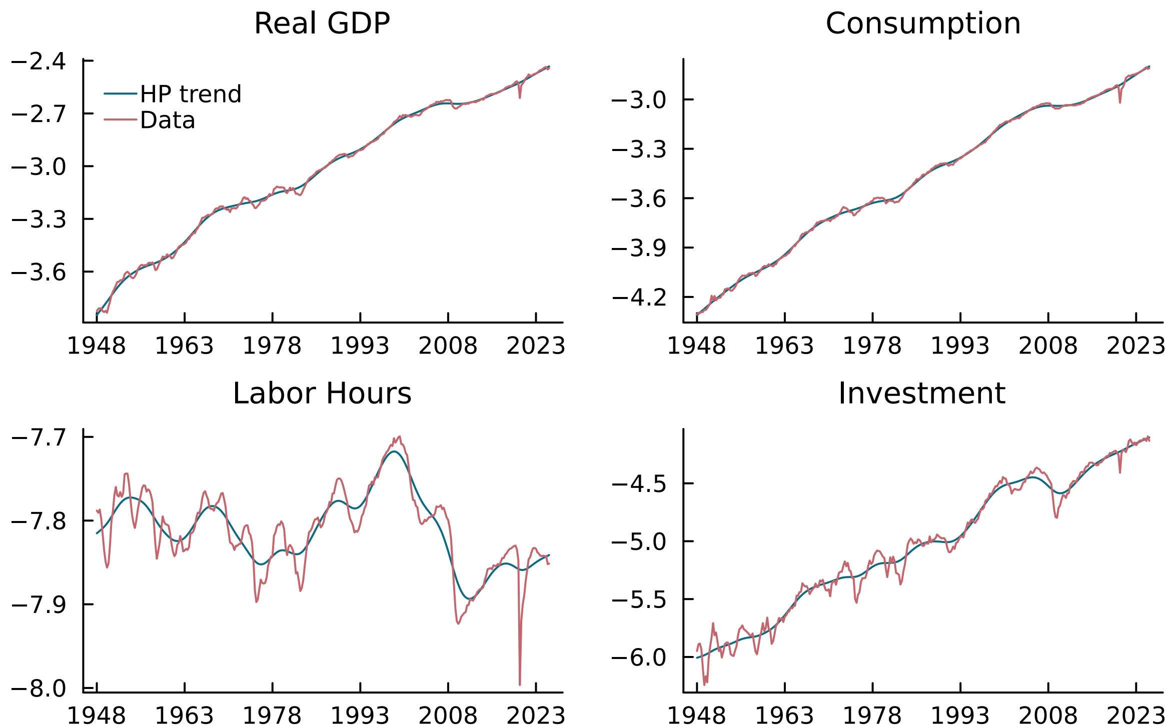


図 1.6: **Data and Trend of Logs of U.S. Aggregates.** Quartely Data 1948I-2025III from FRED. HP filter with $\lambda = 1600$.

図 1.7 は, Real GDP のサイクル成分と他の経済変数のサイクル成分を比較したものです. これを見ると消費と労働時間のサイクル成分は GDP のサイクル成分と似た動きをしていることがわかります. 一方で, 投資のサイクル成分は GDP のサイクル成分よりも変動が大きいことがわかります.

なお, HP フィルターは慣例的に用いられている手法ですが

1. λ の選び方によって結果が変わる
2. HP フィルターの関数形に経済学的な裏付けがない

などの問題点があるため, Band Pass Filter (Baxter and King 1999) など他の手法も検討されています.

1.2.3 景気循環統計

RBC モデルの研究では, 景気循環の特徴を定量的に評価するために, 2 次モーメントを計算します. 具体的には, 各経済変数の標準偏差, 自己相関係数, 相関係数を計算します. (1 次モーメントである平均は, トレンド成分を除去した後はゼロになるため, 特に計算する必要はありません.) ここでは時系列データに対して, 対数をとり HP フィルターを適用した後に, 各経済変数の 2 次モーメントを計算します.

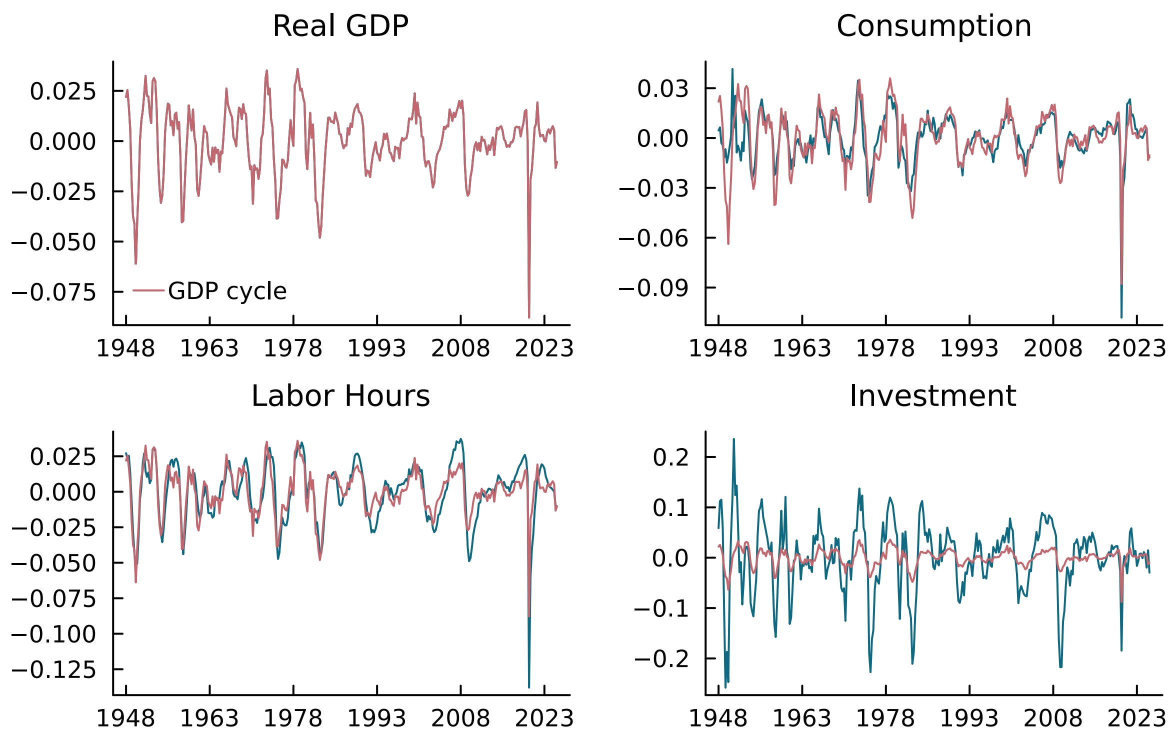


図 1.7: GDP Cycle and Other Cycles. Data from FRED. HP filter with $\lambda = 1600$.

表 1.1: Business Cycle Statistics from U.S. Data 1948I-2025II.

Variable	**Std. Dev. (%)**	**SD rel. to GDP**	**Autocorrelation**	**Corr. with GDP**
GDP	1.649	1.000	0.788	1.000
Consumption	1.356	0.822	0.708	0.797
Investment	7.034	4.266	0.790	0.837
Labor Hours	2.081	1.262	0.818	0.869

1.3 Model

1.3.1 設定

- 経済は一人の代表的消費者からなる
- 効用 $U(c,l)$ は消費 c と余暇 l の関数
- 消費者は一単位の時間をもち, 労働 n と余暇 l を選択する $(n+l=1)$
- 離散時間を仮定し, 期待効用最大化問題を解く

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, l_t).$$

生産関数

- $Y_t = z_t F(k_t, n_t)$
- z_t は生産性 (TFP) であり以下の AR(1) 過程に従う (詳細は Section C.1)

$$\log z_t = \rho_z \log z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1).$$

資本蓄積

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \tag{1.2}$$

- k_t は資本ストック, i_t は投資, δ は減耗率

予算制約

$$c_t + i_t = z_t F(k_t, n_t).$$

1.3.2 ベルマン方程式

上記の生産関数, 資本蓄積, 予算制約を元の効用最大化問題に組み込むと, 以下の問題が導けます.

$$V(k_0, z_0) = \max_{\{k_{t+1}(z_t), n_t(z_t)\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(z_t F(k_t, n_t) + (1-\delta)k_t - k_{t+1}, 1-n_t).$$

ここで, $t=0$ の時点では, k_0 と z_0 が与えられています. また, k_{t+1}, n_t が z_t の実現値に依存していることに注意してください. $t=0$ 時点で決定している変数に着目すると

$$\begin{aligned} V(k_0, z_0) = &\max_{k_1, n_0} U(z_0 F(k_0, n_0) + (1-\delta)k_0 - k_1, 1-n_0) \\ &+ \beta \mathbb{E}_{z_1}\left[\left. \underbrace{\max_{\{k_{t+2}(z_{t+1}), n_{t+1}(z_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(z_{t+1} F(k_{t+1}, 1-n_{t+1}) + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}, 1-n_{t+1})}_{V(k_1, z_1)} \right| z_0 \right]. \end{aligned}$$

ここで $t=0$ の時点では z_1 の実現値は分からず, 期待値をとっている点に注意してください. これをまとめると以下のようなベルマン方程式が得られます.

$$V(k,z) = \max_{k', n} U(zF(k,n) + (1-\delta)k - k', 1-n) + \beta \mathbb{E}[V(k', z')|z].$$

最適条件

価値関数 $V(k,z)$ の微分可能性を仮定し, 効用最大化問題の一階条件を求める. k' に関する一階条件は

$$U_1(c, 1-n) = \beta \mathbb{E}[V_1(k', z')|z]. \tag{1.3}$$

n に関する一階条件は

$$zF_2(k, n) = \frac{U_2(c, 1-n)}{U_1(c, 1-n)}. \tag{1.4}$$

k に関する Envelope 条件を求めると

$$V_1(k, z) = (zF_1(k, n) + 1 - \delta)U_1(c, 1-n). \tag{1.5}$$

ここで, 式 1.3 と 式 1.5 から,

$$U_1(c, 1-n) = \beta \mathbb{E}[(zF_1(k', n') + 1 - \delta)U_1(c', 1-n')|z]. \tag{1.6}$$

Intratemporal and Intertemporal Optimal Conditions

式 1.4 と 式 1.6 の 2 本の式が RBC モデルを特徴づける式です. 式 1.4 は同時点 (Intratemporal) での最適条件, 式 1.6 は異時点 (Intertemporal) での最適条件を表し, オイラー方程式とも呼ばれます.

- 式 1.4 は消費と余暇の間の限界代替率 (MRS) が労働の限界生産性 (MPL) に等しいことを示しています
- 式 1.6 は, 消費の限界効用が, 将来の消費の限界効用の期待値と割引率の積に等しいことを示しています

1.4 Calibration

かね ### RBC モデルにおける標準的なパラメータ

RBC モデルの研究では, 以下のパラメータが慣例的に用いられます. その多くを Kydland and Prescott (1982), Prescott (1986) または Cooley and Prescott (1995) から引用しています.

表 1.2: Standard RBC model parameters. Quarterly frequency.

Parameter	Description	Prescott (1986)	Cooley and Prescott (1995)
β	割引率	0.99	0.987
σ	効用関数の曲率	1.0	1.0
ϕ	効用関数の余暇の重み	0.66	0.64
α	資本のシェア	0.36	0.4
δ	資本の減耗率	0.025	0.012
ρ_z	TFP の自己回帰係数	0.9	0.95
σ_z	TFP のショックの標準偏差	0.007	0.007

なお, Prescott (1986) は年率であるため, 四半期率への変換は以下のように行なっています.

- $\beta_{\text{quarter}} = \beta_{\text{year}}^{\frac{1}{4}} = 0.96^{\frac{1}{4}} \approx 0.99$
- $\delta_{\text{quarter}} = 1 - (1 - \delta_{\text{year}})^{\frac{1}{4}} = 1 - (1 - 0.1)^{\frac{1}{4}} \approx 0.025$

注意しなければならないのは, これらの数字は当時のアメリカ経済に基づいているため, 異なる国や時代では異なる値を取る可能性があるということです.

1.4.1 標準的なパラメータの導出

RBC モデルやその派生となるモデルも上記のパラメータ値が使われることが多いですが, これらのパラメータの導出方法を知っておくことは重要です.

資本分配率 α

Cobb-Douglas 型の生産関数を仮定した時の, 労働分配率 (Labor share) $\frac{wN}{Y}$ は $1-\alpha$ と表せます. これは, 均衡において, 労働の限界生産性 (MPL) が賃金 (wage) に等しいことから導かれます.

$$w = \frac{\partial Y}{\partial N} = (1-\alpha)\frac{Y}{N}.$$

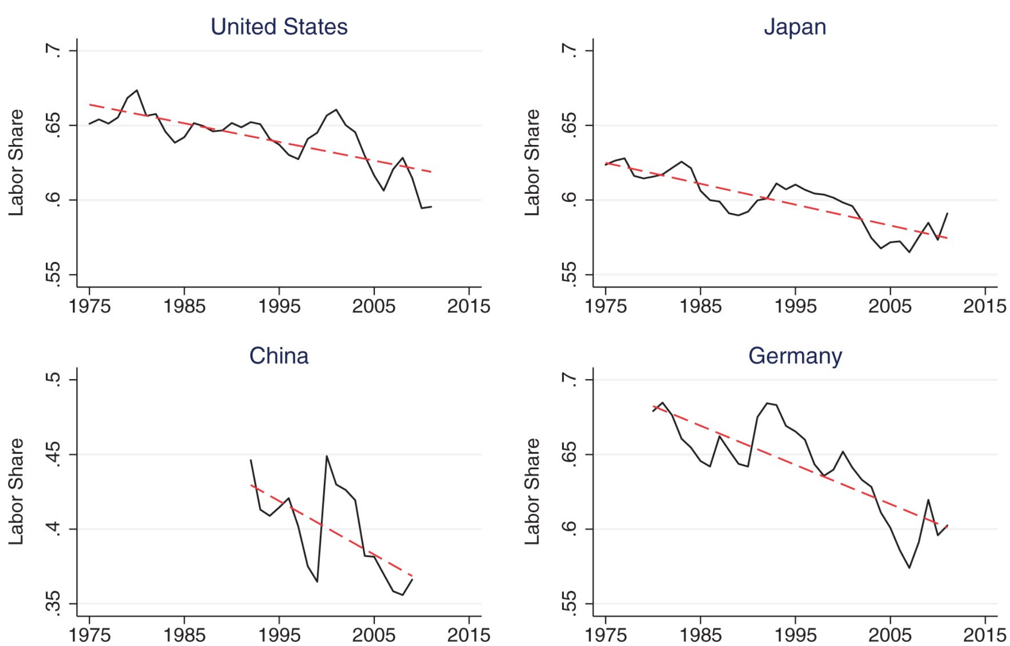


図 1.8: **Declining Labor Share for the Largest Countries.** Figure 2 in Karabarbounis and Neiman (2014).

図 1.8 を見ると, アメリカでは 2000 年まではは労働分配率はおおむね 0.64 であったことがわかります. そのため, Prescott (1986) のように資本分配率は 0.36 と導けます. ただし, グラフからも分かるように近年は労働分配率が減少しているため, この仮定を使うことは難しくなってきています.

資本の減耗率 δ

資本減耗率は Kydland and Prescott (1982) のモデルにおける定常状態から推定した年率 0.1 (四半期換算で 0.025) が用いられることが多いです. Kydland and Prescott (1982) のモデルは今回紹介したモデルと少し異なるため, Cooley and Prescott (1995) の方法を紹介します.

Cooley and Prescott (1995) のモデルでは, 生産関数に外生的な成長率 γ を導入しています. 式 1.2 を y_t で割ると,

$$\frac{y_{t+1}}{y_t}\frac{k_{t+1}}{y_{t+1}} = (1-\delta)\frac{k_t}{y_t} + \frac{i_t}{y_t} \Rightarrow (1+\gamma)\frac{k_{t+1}}{y_{t+1}} = (1-\delta)\frac{k_t}{y_t} + \frac{i_t}{y_t}$$

定常状態では,

$$(1+\gamma)\frac{k}{y} = (1-\delta)\frac{k}{y} + \frac{i}{y} \Rightarrow \frac{i}{k} = (\gamma+\delta).$$

長期の投資資本比率 $\frac{i}{k} = 0.076$[*1], 成長率 $\gamma = 0.028$ を用いて, $\delta = 0.048$ (年率) を導出できます. 四半期換算すると, $\delta = 0.012$ です. 図 1.9 は, アメリカの実質 GDP の成長率であり $\gamma = 0.028$ がおおむね妥当な値であることが分かります.

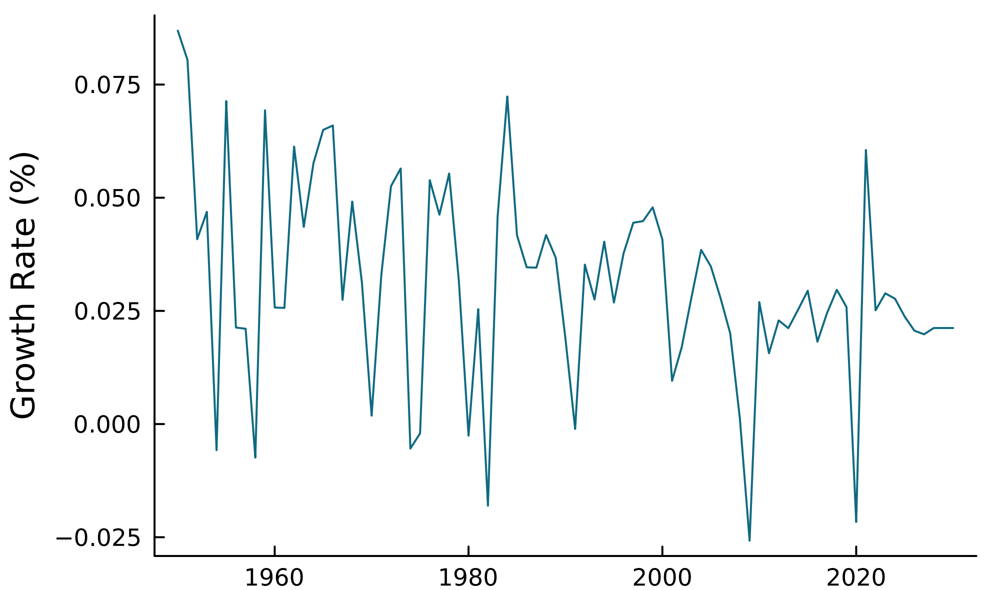


図 1.9: **Growth Rate of Real GDP in the US.** Data from Müller et al. (2025).

効用関数の曲率 (Curvature) σ

戦後のアメリカでは以下の現象が見られました.

- 実質賃金は一定割合で上昇している (Balanced growth path)
- 消費も一定割合で上昇している

*1 これの詳細はかなり複雑そうなので省略します.

- 労働時間はおおむね一定である

King, Plosser, and Rebelo (1988) は Balanced growth path と労働時間一定を仮定した場合, 効用関数の形状は以下のように制約されることを示しました. (KPR 型効用関数)

$$u(c, l) = \frac{(cv(l))^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}.$$

ここで, $v(\cdot)$ は strictly increasing, strictly concave, $v'(0) = -\infty$ を満たす関数です. σ の値に関しては多くの先行研究がありますが, 一般に決定するのは難しいです. ここでは最も単純な形として $\sigma = 1$ を仮定し, $v(l) = l^{\frac{\phi}{1-\phi}}, 0 < \phi < 1$ を仮定します. これにより, 効用関数は以下のようになります.[*2]

$$u(c, l) = (1 - \phi) \log c + \phi \log l. \tag{1.7}$$

なお, 労働時間が一定であるという点は近年の研究では問題視されています. Boppart and Krusell (2020) は, balanced growth path 上で, 労働時間が減少することを許容した効用関数を提案しています.

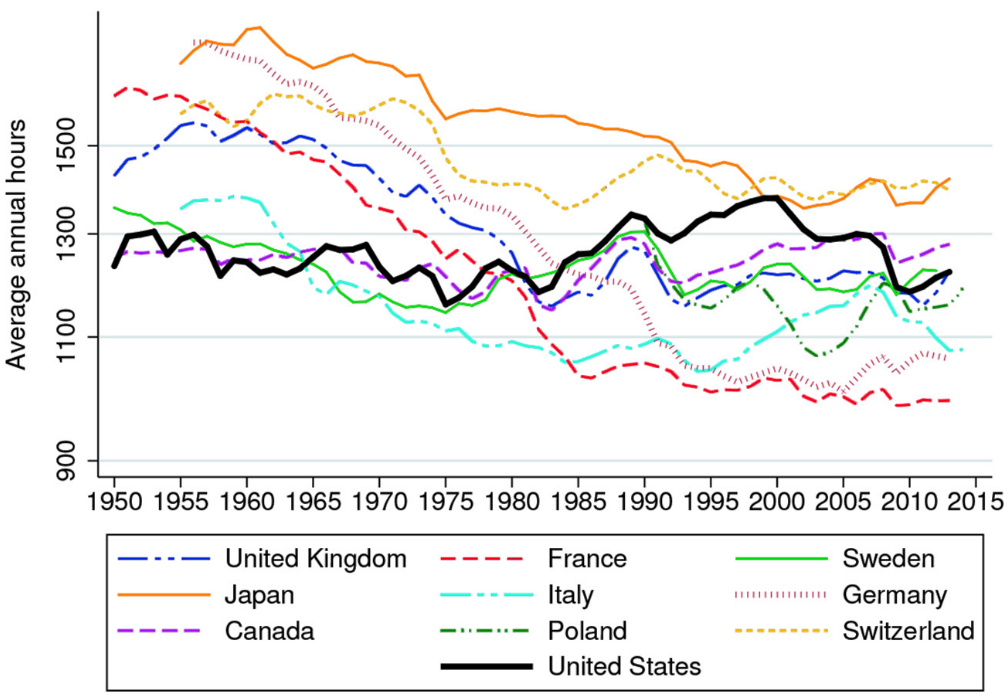


図 1.10: **Selected countries' average annual hours per capita aged 15-64, 1950-2015.** Figure 3 in Boppart and Krusell (2020)

> "The absence of a trend in hours worked in the postwar United States is an exception." — Boppart and Krusell (2020)

効用関数の余暇の重み ϕ

[*2] Prescott の主張する消費と余暇の代替弾力性がおおよそ 1 であるという点も満たしている.

このパラメータの推定値は研究によってブレがあります. 以下では簡単な数値例を示します.

式 1.7 を 式 1.4 に代入することで, 以下の式が導けます.

$$\frac{\phi}{1-\phi}\frac{n_t}{1-n_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{c_t}$$

- 1 日に 8 時間労働をするとして, $n_t = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.
- 最も単純な形の労働分配率として $1-\alpha = \frac{2}{3}$
- GDP に締める消費の割合 (BGP 上では定数) として, $\frac{c_t}{y_t} = \frac{3}{4}$
  - Cooley and Prescott (1995) の値に近い
  - 図 1.11 と比べるとやや小さい値である.[*3]

これらを計算すると, $\phi = \frac{16}{25} = 0.64$ が得られ, おおむね Prescott (1986) や Cooley and Prescott (1995) の値と一致します. ここでは, Azzimonti et al. (2025) の推定結果である $\phi = 0.6325$ を用います.

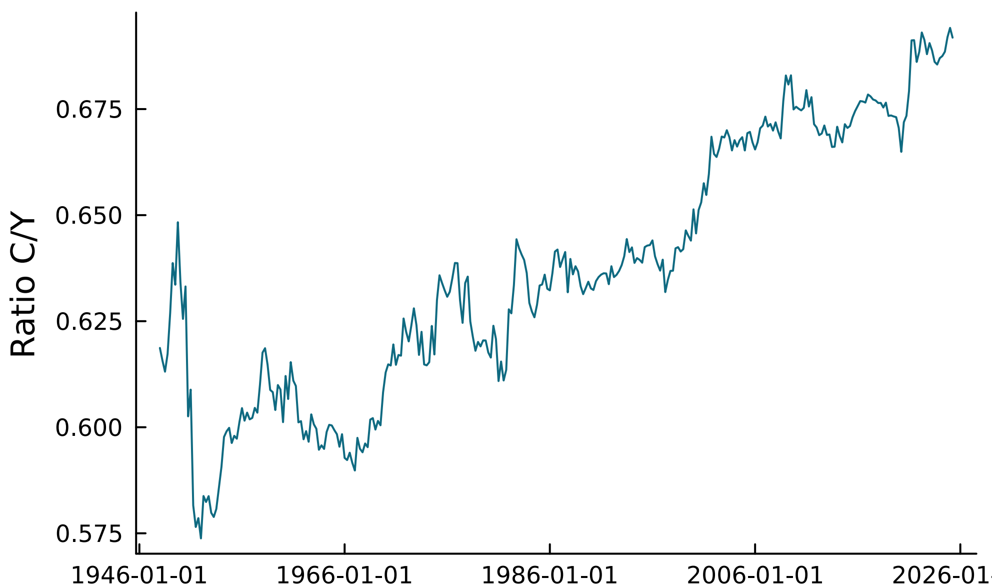


図 1.11: **Share of Consumption to GDP in the US.** Data from FRED.

AR(1) 過程 ρ_z, σ_z

生産関数の関数形から次の関係式が導けます.

$$\log z_t = \log y_t - \alpha \log k_t - (1-\alpha)\log n_t.$$

[*3] ここでは簡易的に GDP に対する個人消費の割合を示していますが, 政府支出も民間に還元されていると考えられるため, 政府消費も含める必要があります. また, Cooley and Prescott (1995) では民間の耐久財消費を投資として扱うなど, モデル上の定義に合わせるために, 細かい調整が行われています.

上で仮定したように α の値を定めると, z_t の時系列データが得られます. そこから, 分散と自己相関を計算することで, ρ_z, σ_z の値を推定できます. ここでは, Cooley and Prescott (1995) の値 $\rho_z = 0.95$, $\sigma_z = 0.007$ を用います.

1.5 Simulation

1.5.1 `MacroModelling.jl` によるシミュレーション

RBC モデルのシミュレーションを行います. シミュレーション 1 から実装するためには, プログラミングや線形代数の基礎知識が必要ですが, RBC や DSGE などの有名なマクロモデルはそのシミュレーションを自動化するパッケージが数多く存在します. ここでは, Julia の `MacroModelling.jl` パッケージを用います. なお, 歴史的には (現在でも) Matlab の `Dynare` パッケージが広く使われていますが, Matlab を利用するにはライセンス料がかかります.

$$
\begin{aligned}
\phi \frac{1}{1-n_t} &= (1-\phi)\frac{z_t(1-\alpha)k_t^{\alpha}n_t^{-\alpha}}{c_t} \\
\frac{1-\phi}{c_t} &= \beta \mathbb{E}\left[\frac{(1-\phi)(z_{t+1}\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha}+1-\delta)}{c_{t+1}}\middle| z_t\right] \\
k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + z_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t \\
\log z_{t+1} &= \rho_z \log z_t + \sigma_z \varepsilon_t
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

`MacroModelling.jl` では上記のモデルを以下のように, ほとんどそのまま記述できます. 一つ注意点としては, t 時点ですでに決定されている変数 (k_t, z_t) は $t-1$ 時点の変数として記述する必要があるということです. また, 後に IRF をプロットするために, investment i_t と output y_t は明示的にモデルの中で定義する必要があります.

```
Remove redundant variables in non-stochastic steady state problem:  1.055 seconds
Set up non-stochastic steady state problem:             14.254 seconds
Find non-stochastic steady state:                    1.535 seconds
Take symbolic derivatives up to first order:                4.2 seconds
Model:        RBC
Variables
 Total:       6
  Auxiliary:  0
 States:      2
  Auxiliary:  0
 Jumpers:     2
  Auxiliary:  0
Shocks:       1
Parameters:   6
```

ここで行われているのは以下の 3 つのステップです.

1. Variable の認識
2. Non-stochastic steady state の計算
3. 線形化 (一次近似)

モデル上のパラメータ数が 6 (y, c, k, n, z, i) であること, 状態変数が 2 つ (k, z) であること, ジャンプ変数が 2 つであること (c, n) であること, ショックが 1 つであること (ε) が正しく認識されています. 線形化および一次近似はここでは立ち寄らず, Chapter 2 で詳しく説明します.

Non-stochastic Steady State

Non-stochastic steady state はその名の通り, ショックが存在しない場合の定常状態を指します. 具体的には式 1.8 の式を用いて, 以下の連立方程式を解きます.

$$
\begin{aligned}
\phi \frac{1}{1-n} &= (1-\phi)\frac{(1-\alpha)k^{\alpha}n^{-\alpha}}{c} \\
\frac{1-\phi}{c} &= \beta\left[\frac{(1-\phi)(\alpha k^{\alpha-1}n^{1-\alpha}+1-\delta)}{c}\right] \\
k &= (1-\delta)k + zk^{\alpha}n^{1-\alpha} - c \\
\log z &= \rho_z \log z + \sigma_z \cdot 0
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

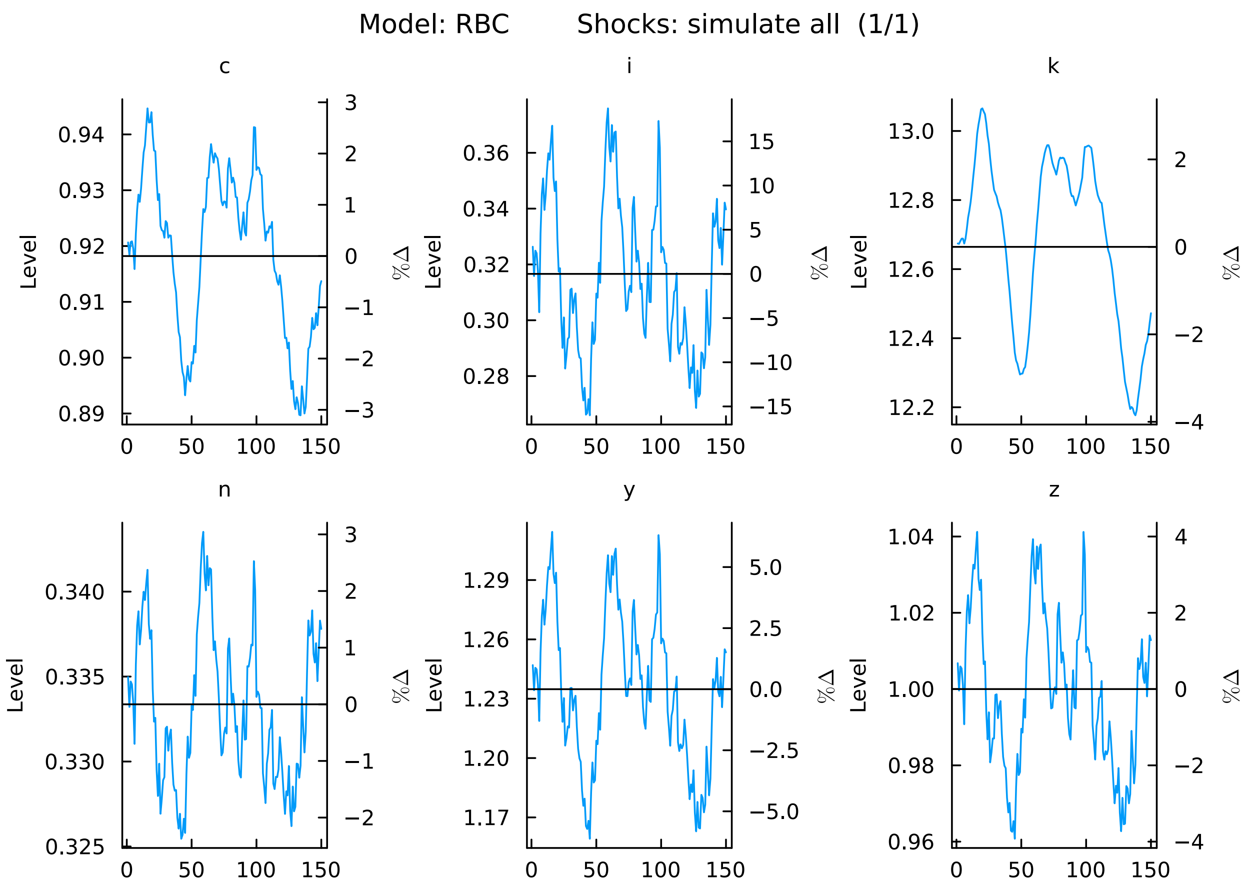
今回のような単純なモデルでは, 解析解を求めることが可能ですが, 一般的には解析解がないため, 数値的に解く必要があります. `MacroModelling.jl` では, `get_steady_state` 関数を用いて簡単に計算できます.

```
2-dimensional KeyedArray(NamedDimsArray(...)) with keys:
↓   Variables_and_calibrated_parameters ∈ 6-element Vector{Symbol}
→   Steady_state_and_∂steady_state∂parameter ∈ 7-element Vector{Symbol}
And data, 6×7 Matrix{Float64}:
        (:Steady_state)   (:β)       …    (:δ)        (:ρ_z)  (:σ_z)
  (:c)   0.918207         11.9452       -15.9294     0.0     0.0
  (:i)   0.316611         16.4954        -0.591578   0.0     0.0
  (:k)  12.6644          659.814       -530.24       0.0     0.0
  (:n)   0.333369          2.22744        0.882066   0.0     0.0
  (:y)   1.23482          28.4405    …  -16.5209     0.0     0.0
  (:z)   1.0               0.0            0.0        0.0     0.0
```

ここでは, steady state の値の他に, 各パラメータに対する偏微分も計算されています. 例えば, 余暇のウェイトである ϕ の増加に対して, 消費 c や労働 n が減少することがわかります.

Simulation

このモデルは以下のように簡単にシミュレーションできます.



ここでいうシミュレーションとは

- 初期値を与える．ここでは steady state の値
- ショックを与える．ここでは TFP ショック $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ を毎期与える

各経済変数が相関を持ちながら変化していく様子が見て取れます．次節ではより詳しく評価を行います．

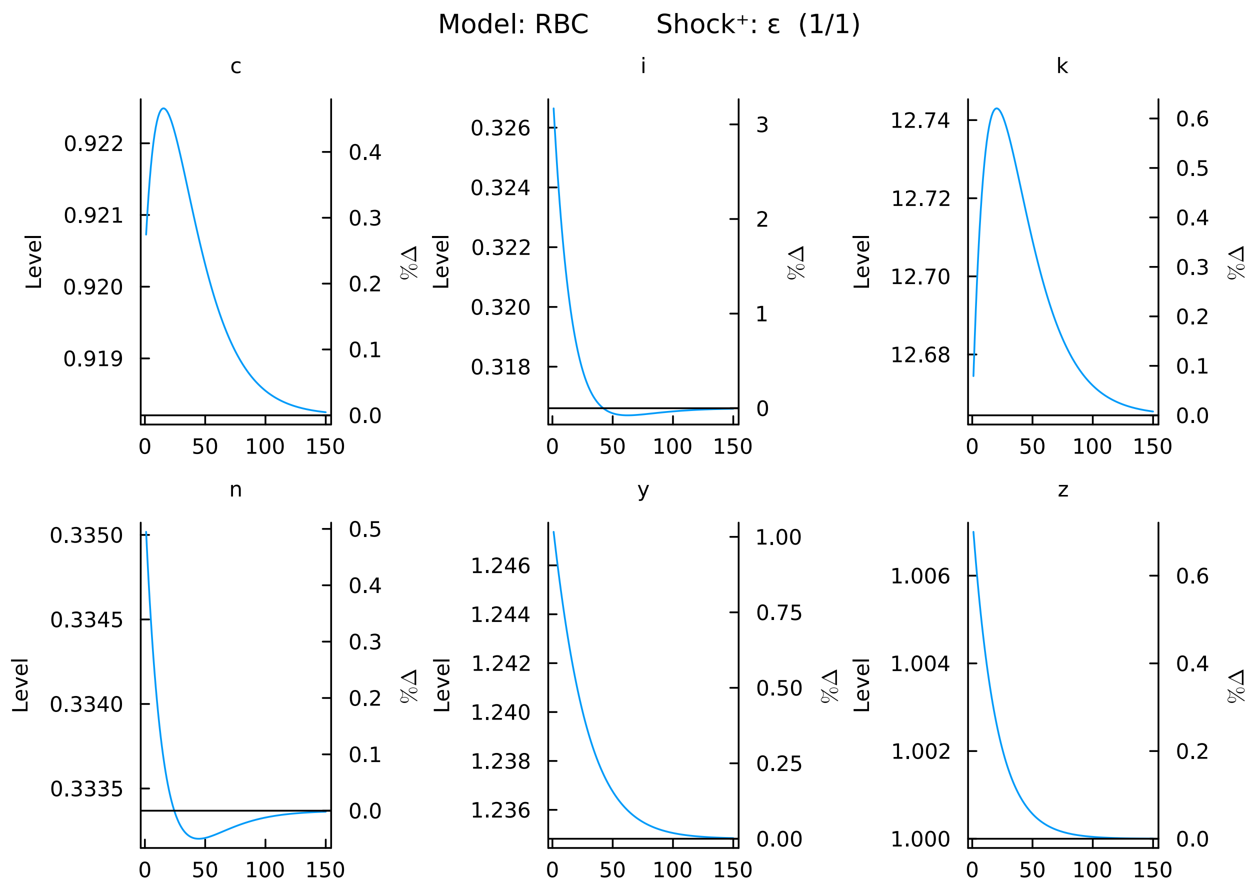
1.6 Evaluation

1.6.1 Impulse Response Function (IRF)

Impulse Response Function (IRF) は, ショックに対する経済変数の応答を示すグラフです．RBC モデルでは, TFP ショックに対する経済変数の応答を調べることが一般的です．具体的には

1. $t = 0$ の時点で TFP ショック $\varepsilon_t = 1$ を与える
2. $t = 1$ 以降の時点で TFP ショックはゼロに戻す．$\varepsilon_t = 0$
3. ショック後の経済変数がどう steady state に収束していくかを調べる

`MacroModelling.jl` では, `plot_irf` 関数を用いて IRF をプロットできます．



モデルを理解する上で, それぞれの経済変数の変化を言語化することが大切です.

- z_t: TFP ショックにより, 生産性が一時的に上昇した後, ρ_z に従って減少していく
- y_t: TFP ショックにより生産性が上昇し, 生産量も一時的に増加する. その後, TFP の減少に伴い生産量も減少していく
- c_t: 生産の上昇に伴い (恒常所得仮説に従って緩やかに) 消費が増加する. その後, 生産の減少に伴い消費も減少していく
- n_t: TFP ショックにより, 労働の限界生産性が上昇し, 即座に労働供給が増加する. その後, 豊かになった家計は余暇を増やすために労働供給を減少させる
- i_t: TFP ショックにより, 資本の限界生産性が上昇し, 即座に投資が増加する. その後, 生産性の減少に伴い投資も減少していく
- k_t: 資本はストック変数であるため, フローである投資 i_t の変化に応じて徐々に変化する

ρ_z の役割

RBC モデルでは, TFP ショックの自己回帰係数 ρ_z が重要な役割を果たします. ρ_z が大きいほど, ショックの影響が長く続くことを意味します. y_t は z_t に強く依存するため, ρ_z が大きいほど y_t の増加も長く続きます. また, 消費をスムーズにする働きから, c_t の変化は y_t より緩やかになります. 生産性の変化が長く続かないと予期している家計は, 初期の高い生産性を活かすために労働供給を増加させます. そのため, ρ_z が小さいほど n_t の初期反応が大きくなります.

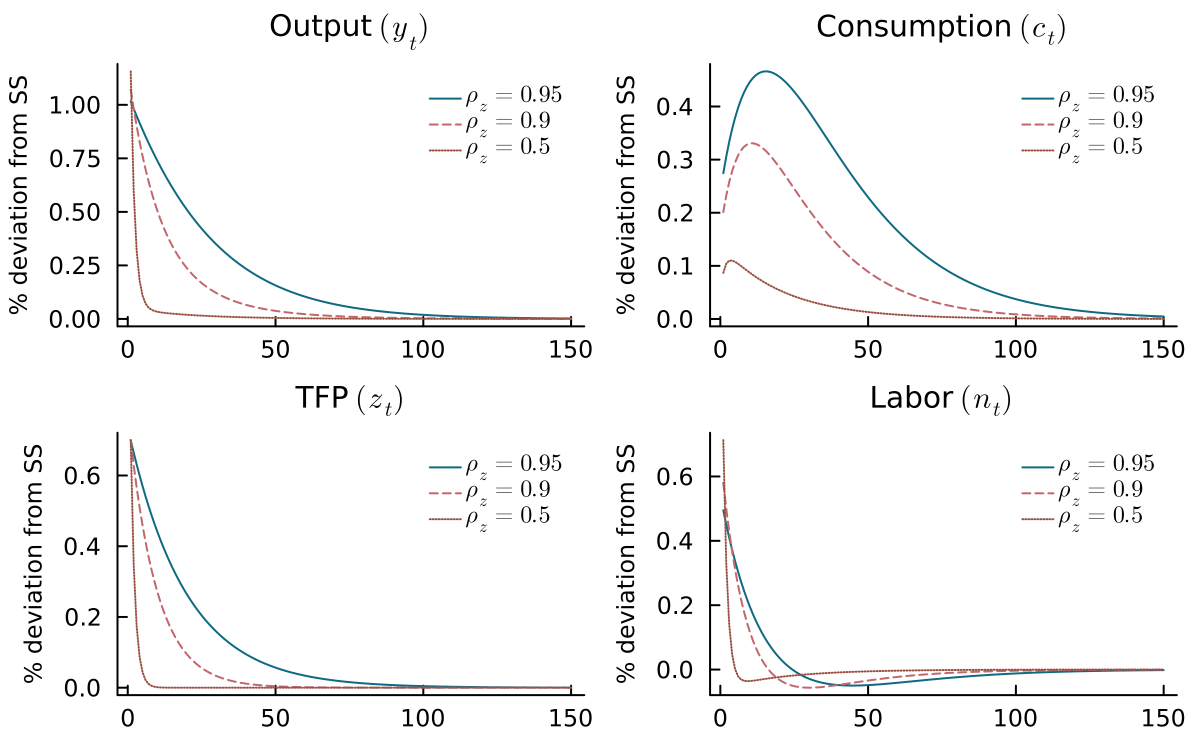


図 1.12: IRFs with Different TFP Persistence ρ_z.

1.6.2 景気循環統計

Section 1.2 でみた, 景気循環の特徴を定量的に評価するために, シミュレーション結果から 2 次モーメントを計算します. 具体的には, 各経済変数の標準偏差, 自己相関係数, 相関係数を計算します. ポイントとしては

- シミュレーションのバーンイン期間 (burn-in period) を設ける. ここでは 100 期間
- シミュレーションの期間は実際のデータと同じ 140 期間
- 各経済変数の対数をとり, 周期成分を HP フィルターで抽出する. ここでは四半期データを想定して, $\lambda = 1600$ を使用
- 各経済変数の標準偏差, 自己相関係数, 相関係数を計算する
- シミュレーションを複数回行い, 結果を平均化する. ここでは 250 回のシミュレーションを行う

ここで大事なのは, シミュレーションの結果を実際のデータと同じように扱うと言うことです. そのため, 対数をとり HP フィルターを適用しています.

表 1.3: Business Cycle Statistics from RBC Model

Variable	Std. Dev. (%)	SD rel. to GDP	Autocorrelation	Correlation with GDP
Output	1.323	1.000	0.700	1.000
Consumption	0.413	0.312	0.790	0.897

Variable	Std. Dev. (%)	SD rel. to GDP	Autocorrelation	Correlation with GDP
Investment	4.148	3.137	0.690	0.991
Labor	0.645	0.488	0.688	0.982
TFP	0.907	0.686	0.694	0.998

ここで 表 1.1 と 表 1.3 の結果を比較すると, RBC モデルは実際のデータの 2 次モーメントをよく再現していることが分かります. 特に,

- 消費と労働の標準偏差は GDP より小さい
- 投資の標準偏差は GDP より数倍大きい

ところは実際のデータをよく再現しています. ただし, GDP y との相関は, 実際のデータよりも大きくなっています. これは, RBC モデルが TFP ショックに対して非常に敏感であるためです.

RBC モデルはとてもシンプルなモデルですが, 実際のデータの景気循環をよく再現することが分かります. そのため, RBC モデルを土台として, モデルを拡張することで, より現実的なモデルを構築することができます. 代表的な研究としては, 以下のように発展していきます.

- 個人の異質性: Aiyagari (1994)
- 金融の役割: New Keynesian モデル
- 失業の役割: Merz (1995); Andolfatto (1996)

第 2 章

New Keynesian Model

2.1 New Keynesian Model とは

New Keynesian Model とは, RBC モデルに名目の硬直性 (nominal rigidity) を加えたモデルです. 名目賃金や名目価格が調整されるまでの時間がかかることを考慮し, このような価格や賃金を sticky price や sticky wage と呼びます. これにより, 短期的な価格の硬直性が生じ, 経済の変動に対する反応が遅れることになります. その結果, 名目変数 (貨幣供給や金利) が実体経済に影響を与えることが可能になります.

$$\text{New Keynesian Model} = \text{RBC Model} + \text{Nominal Rigidity}.$$

Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) モデルという呼称もありますが, これは RBC モデルや New Keynesian モデルを含む, より一般的な呼称です. この授業では RBC モデルと区別するために New Keynesian モデルと呼ぶことにします.

2.2 Nominal Rigidity

2.2.1 Nominal vs. Real

ここで, 価格, 名目値と実質値という概念を導入します.

- P_t: 名目価格 (nominal price). または物価水準 (price level)
- i_t: 名目金利 (nominal interest rate)

この時, インフレ率 (inflation rate) π_t は以下のように定義されます.

$$\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

今までの RBC モデルでは, 金利は実質金利 (real interest rate) r_t として扱ってきました. ここでいう実質金利とは, 名目金利からインフレ率を差し引いたものであり, 以下のように定義されます.

$$1 + r_t := \frac{1 + i_t}{1 + \pi_{t+1}}.$$

また, $r_t \pi_{t+1}$ は無視できるほど十分小さいので, 近似的に以下のように表せます.

$$r_t \approx i_t - \pi_{t+1}.$$

これをフィッシャー方程式 (Fisher Equation) と呼びます.

2.2.2　Monetary Neutrality in RBC Model

RBC モデルに価格がなぜ登場しなかったかというと, RBC モデルでは価格が完全に柔軟 (flexible) であると仮定しており, 価格が経済に影響を与えない **貨幣中立性 (monetary neutrality)** が成立しているからです.

ここで, 従来の RBC モデルに価格 P_t を導入してみます. 単純化のために, 生産関数を $y_t = w_t n_t$ とし, 名目貯蓄を A_t とします. すると, 家計の予算制約は以下のようになります.

$$P_t c_t + A_t = P_t w_t n_t + (1 + i_t) A_{t-1}.$$

これを P_t で割ると, $a_t = \frac{A_t}{P_t}$ とすると,

$$c_t + a_t = w_t n_t + \underbrace{\frac{1 + i_t}{1 + \pi_t}}_{=1+r_t} a_{t-1}.$$

企業の利潤は以下であり, P_t で割っても実質値 y_t, w_t, n_t に影響しません.

$$\Pi_t = P_t y_t - P_t w_t n_t.$$

次節以降では, 企業の価格改訂コストを導入することで, 価格が実質値に影響を与えるようにします.

2.2.3　Origin of Nominal Rigidity

モデル上では抽象的な価格の硬直性を導入しますが, 具体的には以下のような理由で価格や賃金が硬直的になると考えられています.

- **メニューコスト** (menu cost): 価格を変更する際に, 印刷や広告などのコストがかかるため, 企業は頻繁に価格を変更しない
- **合理的無関心** (rational inattention): 情報を収集し処理することにはコストがかかるため, 企業は合理的に情報を無視し, 価格を頻繁に変更しない

実証的にも価格の硬直性は観測されており, 図 2.1 はビールの価格があまり頻繁に変更されないことを示しています.

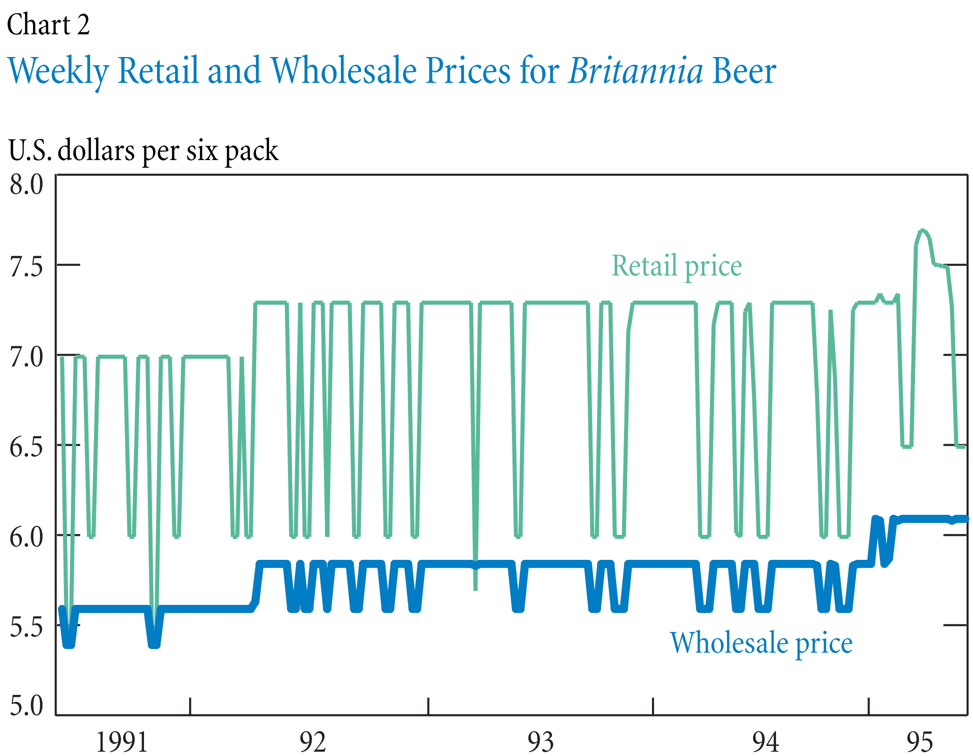


図 2.1: Chart 2 from Goldberg and Hellerstein (2007)

2.3 Model

2.3.1 IS-MP-PC モデル

New Keynesian モデルの基本的な枠組みは RBC モデルに価格硬直性を加えたものです. モデルの設定は次節以降で詳しく説明しますが, 最終的には以下の 3 つの式に集約されます.

$$\tilde{Y}_t = \mathbb{E}_t\left[\tilde{Y}_{t+1}\right] - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - \mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] - r_t^n\right) \qquad \text{(NK IS Curve)}$$

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa\tilde{Y}_t \qquad \text{(NK Phillips Curve)}$$

$$i_t = r_t + \phi_\pi\pi_t + \phi_y\tilde{Y}_t \qquad \text{(MP Rule)}$$

- $\tilde{Y}_t$: 産出ギャップ (output gap)
- i_t: 名目金利
- π_t: インフレ率
- r_t^n: 自然利子率 (natural interest rate)

なおこの方程式は線形であるため, 全てを 100 倍にしたパーセント表記にしても同じです. 導出の過程では扱いやすい実際の値 ($\pi_t = 0.01$ ならば 1% のインフレ率) で扱いますが, IS-MP-PC の形になった後は, パーセントとして扱って ($\pi_t = 1$ ならば 1% のインフレ率) も問題ありません. 実務上はパーセントとして扱っているものが多い

です.

Flexible Price Equilibrium

金融政策を考える際にベンチマークとして, 価格が完全に柔軟である場合の均衡状態を考えます. これを自然 (natural) な状態と呼びび, x_t^n のように表します. 産出ギャップ Y_t^n は自然水準との対数差で定義されます.

$$\tilde{Y}_t := \log Y_t - \log Y_t^n.$$

2.3.2　設定

公共セクター

- 中央銀行は名目利子率を制御する金融ルール (Monetary Policy Rule) を持つ
- 政府は (この授業のモデルでは) 考慮しない

民間セクター

- 民間セクターは, 家計, 中間財企業, 最終財企業から構成される
- 家計は最終財を消費し, 中間財企業に労働を供給する
- 最終財企業は中間財企業から中間財を調達し, 最終財を生産する (完全競争)
- 中間財企業は差別化された中間財を生産し, 最終財企業に販売する (独占的競争)

Rotemberg (1982) vs. Calvo (1983)

価格の硬直性を考慮する際に, 価格の調整がどのように行われるかについては 2 つのアプローチがあります.

- **Rotemberg (1982)**: 価格の調整はコストがかかるとし, 価格を調整する企業はそのコストを考慮して価格を設定する
- **Calvo (1983)**: 価格の調整は確率的に行われるとし, 各企業が価格を調整する確率を一定とする

IS-MP-PC のような線形化されたモデルでは, どちらのアプローチを用いても同じ結果になりますが, 非線形のまま数値計算を行う場合は結果が少し異なります. 二つのモデルの違いについては Ascari and Rossi (2012) などを参照してください. この授業では, 線形化したモデルを扱うことと, 導出が平易なことから Rotemberg (1982) のアプローチを採用します.

2.3.3　家計

代表的な家計は以下の期待割引価値を最大化すると考えます.

$$U_0 = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \right)$$

- C_t: (最終財) 消費

- N_t: 労働供給

家計の各期の予算制約は以下のようになります.

$$P_t C_t + \frac{1}{1+i_t} B_t = W_t N_t + \Pi_t + B_{t-1}.$$

- P_t: 最終財価格
- B_t: 名目債券 (nominal bond) の一期保有量 (one-period bond holdings)
- i_t: 名目金利 (nominal interest rate)
- W_t: 名目賃金 (nominal wage)
- Π_t: 企業の名目利益 (nominal profits)

ベルマン方程式

$$\begin{aligned} V(B_{t-1}) &= \max_{C_t, N_t, B_t} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} + \beta \mathbb{E}_t \left[V(B_t) \right] \\ &= \max_{C_t, N_t} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} + \beta \mathbb{E}_t \left[V((1+i_t)(W_t N_t + \Pi_t + B_{t-1} - P_t C_t)) \right] \end{aligned}$$

最適条件

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma} &= \beta(1+i_t) P_t \mathbb{E}_t \left[V'(B_t) \right] && \text{(FOC of } C_t\text{)} \\ N_t^{\phi} &= \beta(1+i_t) W_t \mathbb{E}_t \left[V'(B_t) \right] && \text{(FOC of } N_t\text{)} \\ V'(B_{t-1}) &= \beta(1+i_t) \mathbb{E}_t \left[V'(B_t) \right] && \text{(EC of } B_{t-1}\text{)} \end{aligned}$$

ここから, $V'(B_{t-1}) = \frac{C_t^{-\sigma}}{P_t}$ が導けます. これを用いて,

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma} &= \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{P_t}{P_{t+1}} (1+i_t) C_{t+1}^{-\sigma} \right] && \text{(Euler equation)} \\ C_t^{-\sigma} \frac{W_t}{P_t} &= N_t^{\phi} && \text{(Intratemporal labor supply)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

これは実質値を考えると, RBC モデルと同じ含意が得られることが分かります.

$$\begin{aligned} C_t^{-\sigma} &= \beta \mathbb{E}_t \left[(1+r_t) C_{t+1}^{-\sigma} \right] \\ C_t^{-\sigma} w_t &= N_t^{\phi} \end{aligned}$$

2.3.4 企業

生産

消費者は最終財 (final good) を消費します. 最終財は代表的企業が中間財 $j \in [0,1]$ を以下の CES 生産関数で生産します.

$$
Y_t = \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, dj \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}.
$$

- $Y_{j,t}$: 中間財 j の生産量
- ε: 代替弾力性 (elasticity of substitution)

中間財は以下の線形生産関数で生産されます.

$$
Y_{j,t} = A_t N_{j,t}
$$

価格

最終財の価格 P_t は中間財の価格 $P_{j,t}$ を用いて以下のように表されます.

$$
P_t = \left(\int_0^1 P_{j,t}^{1-\varepsilon} \, dj \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.
$$

証明は 命題 B.1 を参照してください.

中間財の価格 $P_{j,t}$ は, 企業 j が独占的に設定します. このコストは, 最終財で計測され, 以下の Rotemberg (1982) 型の価格改訂コストがかかります.

$$
\frac{\varphi}{2} \left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right)^2 Y_t.
$$

中間財企業は, 賃金 W_t を (プライステイカーとして) 支払います. そのため, 中間財企業 j の限界費用 (marginal cost) は以下のように表されます.

$$
MC_{j,t} = \frac{W_t}{A_t}
$$

これは, 企業ごとに同一のため MC_t と表記します.

最適化問題

中間財企業 j は以下の価値関数を最大化します.

$$
\max_{\{P_{j,t}\}_{t=0}^{\infty}} \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} D_{0,t} \left[\left(\frac{P_{j,t}}{P_t} - MC_t^r \right) Y_{j,t} - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right)^2 Y_t \right]
$$

ここで, $D_{0,t} := \beta^t \frac{U_c(t)}{U_c(0)}$ は**確率的割引因子**（stochastic discount factor）です.

- 企業の所有者は代表的家計であり、企業価値は家計の効用で測定される

- $U_c(t) = C_t^{-\sigma}$ は t 期の消費の限界効用
- $U_c(0)$ で割ることで, 0 期時点の効用を基準に相対的な価値を表す
- 最終財の価格を基準に考えるため, 実質限界費用 $MC_t^r = \frac{W_t}{A_t P_t}$ を用います.

ここから以下のベルマン方程式を得ます.

$$V(P_{j,t-1}) = \max_{P_{j,t}} \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} - MC_t^r \right) Y_{j,t} - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right)^2 Y_t + \mathbb{E}_t[D_{t+1} V(P_{j,t})].$$

ここで, $D_{t,t+1}$ を省略して, $D_{t+1} := \beta \frac{U_c(t+1)}{U_c(t)}$ としました.

最適価格

中間財需要 $Y_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t}}{P_t}\right)^{-\varepsilon} Y_t$ を代入すると, ベルマン方程式は以下のようになります.

$$V(P_{j,t-1}) = \max_{P_{j,t}} \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} - MC_t^r \right) \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon} Y_t - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right)^2 Y_t + \mathbb{E}_t[D_{t+1} V(P_{j,t})].$$

最適化条件は以下のようになります.

$$\left((1-\varepsilon) \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon} + \varepsilon MC_t^r \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon-1} \right) \frac{Y_t}{P_t} - \varphi \left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right) \frac{Y_t}{P_{j,t-1}} + \mathbb{E}_t[D_{t+1} V'(P_{j,t})] = 0$$

$$V'(P_{j,t-1}) = \varphi \left(\frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right) \frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}^2} Y_t$$

対称均衡を仮定すると, 全ての企業は同じ価格を設定するため, $P_{j,t} = P_t$ とおけます. これにより, 次の式を得ます.

$$(1 - MC_t^r)\varepsilon = 1 - \varphi \pi_t (1 + \pi_t) + \varphi \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \pi_{t+1} (1 + \pi_{t+1}) \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right]. \tag{2.2}$$

ここで $1 + \pi_t := \frac{P_t}{P_{t-1}}$ とおきました.

2.3.5 均衡

Market clearing

$$\begin{aligned} N_t &= \int N_{j,t} \, dj && \text{Labor Market Clearing} \\ Y_t &= C_t && \text{Goods Market Clearing} \end{aligned}$$

Rotemberg (1982) 型のモデルでは, 価格改訂のコストを

1. 意思決定に影響を及ぼすが, 実体経済に直接的な影響を与えない
2. 価格改訂には, 最終財の生産量に依存するコストがかかる

という 2 つの考え方があります. $Y_t = C_t$ という条件はこの 1 つ目の考え方に基づいています. 2 つ目の考え方は Exercise で扱います.

2.3.6　Flexible Price Equilibrium

価格が柔軟である場合, 価格の改定にはコストがかかりません. すなわち, ベルマン方程式は以下のようになります.

$$V(P_{j,t-1}) = \max_{P_{j,t}} \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} - MC_t^r \right) Y_{j,t} + \mathbb{E}_t[D_{t+1} V(P_{j,t})].$$

この時, $P_{j,t-1}$ に依存しないため, state variables にもなりません. したがって, さらに書き換えると,

$$V = \max_{P_{j,t}} \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} - MC_t^r \right) Y_{j,t} + \mathbb{E}_t[D_{t+1} V].$$

$Y_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon} Y_t$ を代入し, 最適化条件を求めると,

$$(1-\varepsilon) \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon} = MC_t^r (-\varepsilon) \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon-1}.$$

対称均衡を仮定すると, $P_{j,t} = P_t$ より, 以下の式を得ます.

$$MC_t^r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} =: \frac{1}{\mu}.$$

ここで, $\mu := \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}$ はマークアップ率 (markup rate) と呼ばれます. マークアップ率は, 企業が価格を設定する際に, 限界費用に対してどれだけ上乗せするかを示す指標です. すなわち,

$$\frac{P_t}{MC_t} = \frac{1}{MC_t^r} =: \mu.$$

Flexible price の均衡における値を X^n で表すと,

$$\begin{aligned} Y_t^n &= A_t N_t^n \\ MC_t^{r,n} &= \frac{W_t^n}{A_t P_t^n} = \frac{1}{\mu} \\ \frac{W_t^n}{P_t^n} &= {C_t^n}^\sigma {N_t^n}^\phi \\ Y_t^n &= C_t^n \end{aligned}$$

これらを整理すると, 以下の式を得ます.

$$Y_t^n = \mu^{-\frac{1}{\sigma+\phi}} A_t^{\frac{1+\phi}{\sigma+\phi}}. \tag{2.3}$$

なお, 対数線形化すると自明に

$$\hat{Y}_t^n = \frac{1+\phi}{\sigma+\phi}\hat{A}_t. \tag{2.4}$$

2.4　IS-MP-PC の導出

ここでは, 定常状態におけるゼロインフレ率 $\pi = 0$ を仮定します. ほとんどの論文ではこれを仮定しますが, 仮定しない場合は IS と PC の形は複雑になります. 詳細は Ascari and Rossi (2012) を参照してください.

また, ゼロインフレでは価格改訂が起こらないので, 定常状態では価格改訂コストは存在しません. したがって, 定常状態では柔軟価格均衡と同じ値を取ります $(Y = Y^n)$.

2.4.1　New Keynesian IS Curve

式 2.1 のオイラー方程式から導出します.

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} C_{t+1}^{-\sigma} \right]$$

これを対数線形化すると (命題 B.2), 以下の式を得ます.

$$\hat{C}_t = \mathbb{E}_t \left[\hat{C}_{t+1} \right] - \frac{1}{\sigma} \left(i_t + \log\beta - \mathbb{E}_t \left[\pi_{t+1} \right] \right) \tag{2.5}$$

補題 B.1 より, 産出ギャップは $\tilde{Y}_t = \hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n$ であり, 式 2.4 を用いると,

$$\hat{Y}_t = \tilde{Y}_t + \frac{1+\phi}{\sigma+\phi}\hat{A}_t.$$

Good Market Clearing $(C_t = Y_t)$ より, $\hat{C}_t = \hat{Y}_t$ なので,

$$\tilde{Y}_t = \mathbb{E}_t \left[\tilde{Y}_{t+1} \right] - \frac{1}{\sigma} \left(i_t - \mathbb{E}_t \left[\pi_{t+1} \right] - r_t^n \right) \tag{2.6}$$

なぜなら, 自然利子率は $r_t^n := i_t^n - \mathbb{E}_t \left[\pi_{t+1}^n \right]$ で定義され, 式 2.5 と 式 2.4 を用いると,

$$r_t^n = -\log\beta + \frac{\sigma(1+\phi)}{\sigma+\phi}\left(\mathbb{E}_t\left[\hat{A}_{t+1}\right] - \hat{A}_t\right).$$

と表されるからです. 定常状態では明らかに $r^n = -\log\beta$ となります.

NKIS 式 2.6 の解釈としては, 産出ギャップが将来の産出ギャップ予想 $\mathbb{E}_t\left[\tilde{Y}_{t+1}\right]$ と, 実質金利のギャップ $i_t - \mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] - r_t^n$ によって決定されることを示しています.

1. **将来の産出ギャップ予想**: 家計は消費を平滑化しようとするため, 将来の産出ギャップが高いと予想される場合, 現在の産出ギャップも高くなる
2. **実質金利のギャップ**: 実質金利が高い場合, 貯蓄を増やし現在の消費を減らす. その結果, 産出ギャップが減少する

2.4.2 New Keynesian Phillips Curve

式 2.2 の式を用いて, 価格の硬直性を考慮したフィリップス曲線を導出します.

$$(1 - MC_t^r)\varepsilon = 1 - \varphi\pi_t(1+\pi_t) + \varphi\beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\pi_{t+1}(1+\pi_{t+1})\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right].$$

これを対数線形化すると (命題 B.3), 以下の式を得ます.

$$\begin{aligned}\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + (1-\beta)\pi + \frac{\varepsilon - 1 + (1-\beta)\varphi\pi(1+\pi)}{\varphi(1+\pi)(1+2\pi)}\widehat{MC^r}_t \\ + \frac{\beta\pi}{\varphi(1+2\pi)}\mathbb{E}_t\left[\Delta\hat{Y}_{t+1} - \sigma\Delta\hat{C}_{t+1}\right]\end{aligned}$$

$\pi = 0$ より,

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \frac{\varepsilon-1}{\varphi}\widehat{MC^r}_t.$$

補題 B.2 を用いて,

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \frac{\varepsilon-1}{\varphi}(\sigma+\phi)\tilde{Y}_t.$$

$\kappa = \frac{(\varepsilon-1)(\sigma+\phi)}{\varphi}$ とすると,

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa\tilde{Y}_t. \tag{2.7}$$

解釈としては, 現在のインフレ率が将来のインフレ予想 $\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right]$ と, 現在の景気状況 $\tilde{Y}_t$ によって決定されることを示しています.

1. **インフレ予想**: 急激な価格改訂はコストがかかるため, インフレが予想される場合は, 企業は事前に価格を引き上げる
2. **産出ギャップ**: 需要が高まると, 労働需要が高まり, 賃金が上昇する. 企業はコスト上昇を価格に転嫁し, インフレ率が上昇する

2.4.3 Monetary Policy Rule (Taylor Rule)

Taylor (1993) は 1987-1992 年の Federal Reserve の政策を分析し, 以下のようなルールを提案しました.

$$i_t = r^n + \phi_\pi(\pi_t - \pi^*) + \phi_y \tilde{Y}_t \tag{2.8}$$

Taylor (1993) では $\phi_\pi = 1.5$, $\phi_y = 0.5$ としています. 解釈としては,

- $\phi_\pi > 1$ の場合, インフレ率が目標を上回るとき, 金利を上げることでインフレを抑制しようとする
- $\phi_y > 0$ の場合, GDP ギャップが正のとき, 金利を上げることで景気を抑制しようとする

FRB of Atlanta の Taylor Rule Utility では, いくつかのモデルやパラメータを指定して, Taylor Rule と実際の金利 (Fed Funds Rate) の比較を行うことができます図 2.2. “Alternative 3” として表示されているルールが Taylor (1993) のルールに近いものです. Taylor (1993) の観測した 1987-1992 年の期間をよく説明しているだけでなく, その後の期間もある程度説明できていることがわかります.

なお, 実際の金利は金利ゼロ制約 (Zero Lower Bound, ZLB) によって制約されるため, 超低金利の場合では Taylor Rule が適用できないことに注意してください. ZLB を考慮した数値計算モデルとしては, Adam and Billi (2007) などがあり, 北尾, 砂川, and 山田 (2024) の 7 章で詳しく説明されています.

2.5 Simulation

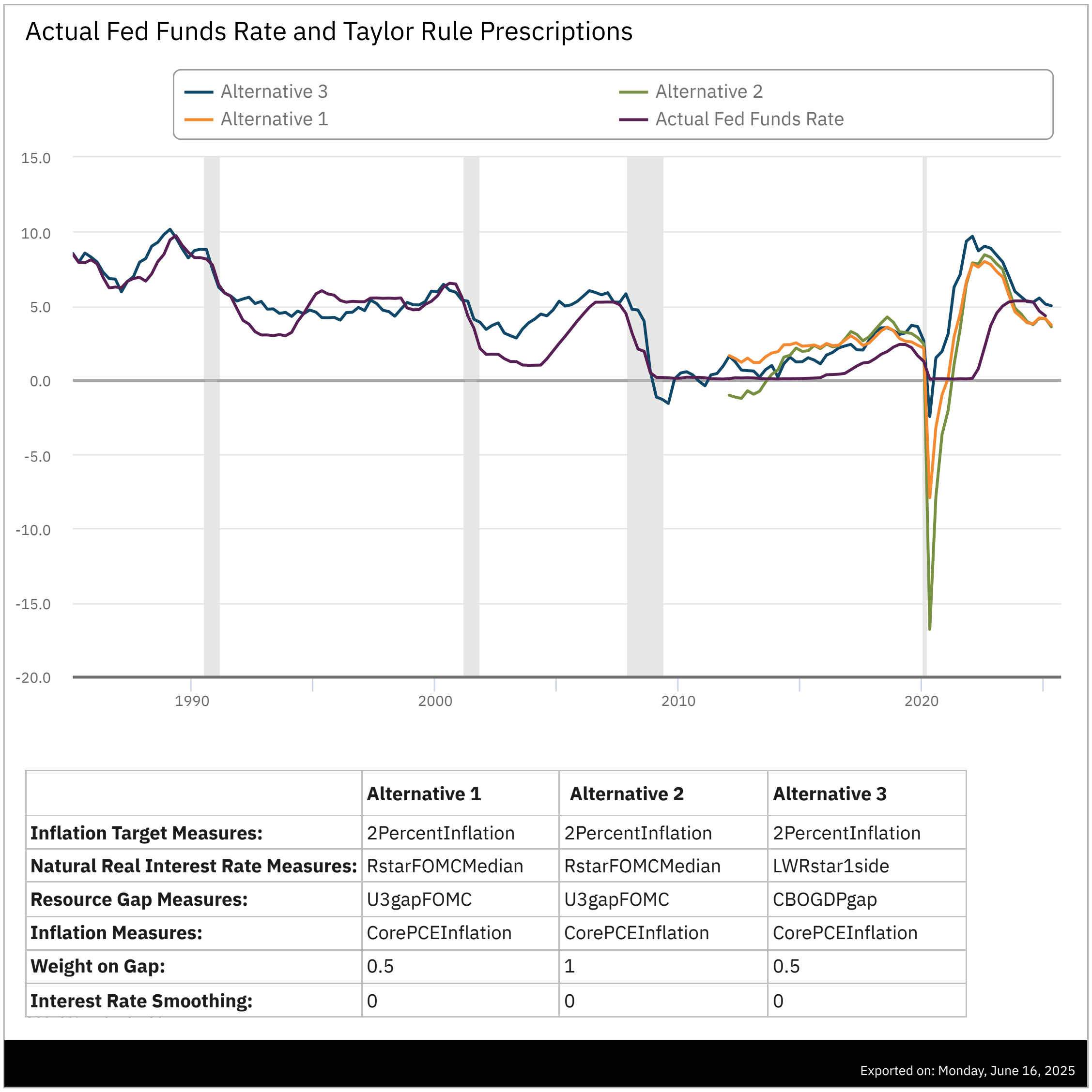
ここからは, Impulse Response Function (IRF) をシミュレーションしていきます. また, 単純化のため, 中央銀行の目標インフレ率は $\pi^* = 0$ とします. これは, 定常状態のインフレ率を 0 と仮定していることと整合的になるからです.[*1]

2.5.1 Calibration

Parameters

モデルの一期間は四半期とし, 以下のパラメータを設定します. Ascari and Rossi (2012) のパラメータを用います.

[*1] Taylor Rule が実証的には 2% をターゲットとしていることと整合的でないことに注意してください. 定常状態のインフレ率が 0 でないと仮定する場合は, NKIS, NKPC の形は少し複雑になります. 詳しくは Ascari and Rossi (2012) を参照してください.



	Alternative 1	Alternative 2	Alternative 3
Inflation Target Measures:	2PercentInflation	2PercentInflation	2PercentInflation
Natural Real Interest Rate Measures:	RstarFOMCMedian	RstarFOMCMedian	LWRstar1side
Resource Gap Measures:	U3gapFOMC	U3gapFOMC	CBOGDPgap
Inflation Measures:	CorePCEInflation	CorePCEInflation	CorePCEInflation
Weight on Gap:	0.5	1	0.5
Interest Rate Smoothing:	0	0	0

図 2.2: Taylor Rules from Fedral Reserve Bank of Atlanta.

表 2.1: New Keynesian Model Parameters

Parameter	Description
$\beta = 0.99$	$\beta = 0.96$ の四半期換算
$\sigma = 1$	Log Utility
$\phi = 1$	Unitary Frisch elasticity
$\varepsilon = 10.0$	Literature
$\varphi = 104.9$	脚注参照[*2]
$\phi_\pi = 1.5$	Taylor (1993)

[*2] Ascari and Rossi (2012) の中で, Calvo 型の価格改訂確率を $1-\theta = 0.25$ とした場合, 対応する Rotemberga 型の価格改訂コストは $\varphi = \frac{(\varepsilon-1)\theta}{(1-\theta)(1-\beta\theta)}$.

Parameter	Description
$\phi_y = 0.125$	Taylor (1993) の四半期換算

Monetary Policy Shocks

IRF をシミュレーションするために, 式 2.8 に以下のショックを与えます.

$$
\begin{aligned}
i_t &= r^n + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{Y}_t + \eta_t \\
\eta_t &= \rho_\eta \eta_{t-1} + \sigma_\eta \epsilon_t.
\end{aligned}
$$

IRF のシミュレーションでは, $t = 0$ 時点で $\epsilon_t = 1$ とし, そのあとは $\epsilon_t = 0$ とします. Galí (2015) の Chapter 3 に従い, $\rho_\eta = 0.5$, $\sigma_\eta = 0.25$ とします.

2.5.2 IRF from Scratch

補題 B.3 より,

$$
\begin{pmatrix} \tilde{Y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \omega \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma & 1 - \beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa + \beta(\sigma + \phi_y) \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t \left[\tilde{Y}_{t+1}\right] \\ \mathbb{E}_t \left[\pi_{t+1}\right] \end{pmatrix} + \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \left(\hat{r}^n_t - \eta_t\right).
$$

ここで, $\omega = (\sigma + \phi_y + \phi_\pi \kappa)^{-1}$, $\hat{r}^n_t = r^n_t - r^n$ です. Monetary policy shocks は自然利子率に影響を与えないため, $\hat{r}^n_t = 0$ とします.

このように, 期待演算子を含む線形システムが得られました. これを前方期待 (foward-looking) を含む線形モデルと呼び, このようなモデルを解くには guess-and-verify が有効です.

このシステムの解が以下の形を満たすとします.

$$
\tilde{Y}_t = \psi_y \eta_t, \quad \pi_t = \psi_\pi \eta_t.
$$

これを代入して, (ψ_y, ψ_π) に対して解くと,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi_y \\ \psi_\pi \end{pmatrix} \eta_t &= \omega\Lambda \begin{pmatrix} \psi_y \\ \psi_\pi \end{pmatrix} \mathbb{E}_t \left[\eta_{t+1}\right] - \omega \mathbf{b} \eta_t \\
&= \omega\Lambda \begin{pmatrix} \psi_y \\ \psi_\pi \end{pmatrix} \rho_\eta \eta_t - \omega \mathbf{b} \eta_t \\
\begin{pmatrix} \psi_y \\ \psi_\pi \end{pmatrix} &= (I - \omega\rho_\eta\Lambda)^{-1}(-\omega\mathbf{b}).
\end{aligned}
$$

このようにして, ψ_y, ψ_π を求めることができれば[*3], IRF を計算することができます.

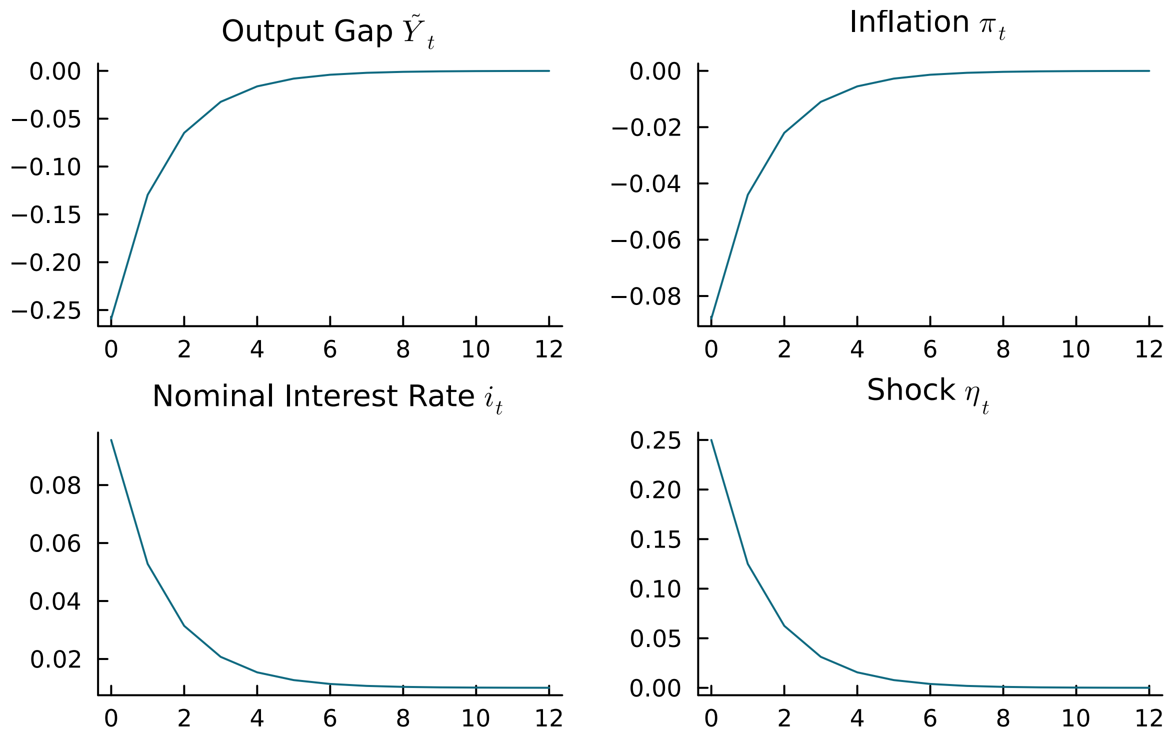


図 2.3: IRF of New Keynesian Model from Scratch

解釈としては, 正の金利ショックが起きた時

- 実質金利の増加により, 現在の消費が減少 (NKIS)
- $Y_t = C_t$ かつ, Y_t^n は影響を受けないため, Output Gap $\tilde{Y}_t$ が減少
- Output Gap の減少により, インフレ率 π_t が減少 (NKPC)

2.5.3 IRF by MacroModelling.jl

同じシミュレーションを, `MacroModelling.jl` パッケージを用いて行うこともできます. 線形化したモデルを用いてもいいですが, 非線形なモデルを直接定義することもできます.

図 2.3 と全く同じ結果が得られます. 実は, `MacroModelling.jl` や `Dynare` といったパッケージは, 対数線形化とそのシミュレーションを自動で行うためのツールだったです.[*4]

[*3] 解の唯一性と必要十分条件は, $\phi_y, \phi_\pi > 0$ に対して,

$$\kappa(\phi_\pi - 1) + (1-\beta)\phi_y > 0.$$

導出は, Bullard and Mitra (2002) を参照してください.

[*4] 対数線形化は一次近似に過ぎませんが, これらのパッケージではより高次の近似も可能です.

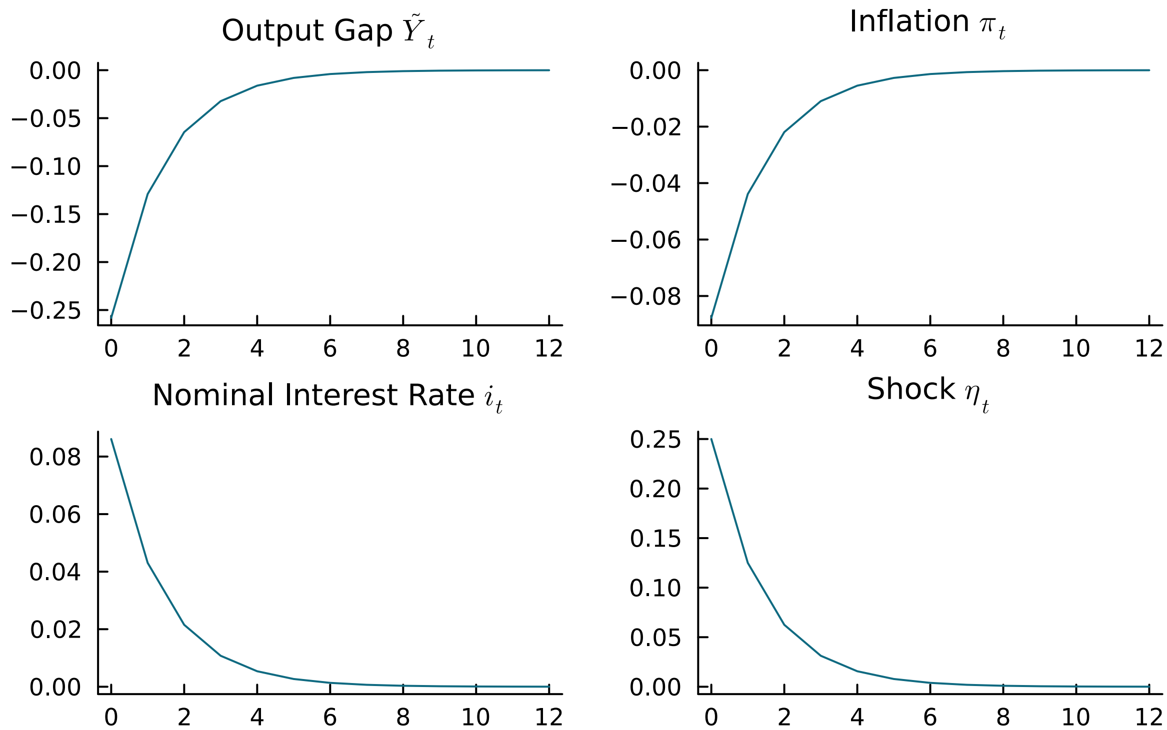


図 2.4: IRF of New Keynesian Model by MacroModelling.jl

第 3 章

Diamond-Mortensen-Pissarides Framework

3.1 DMP Framework とは

これまで見たきたモデルでは, 摩擦のない労働市場を前提としていました. つまり, 全ての企業は労働者を雇うことができ, 労働者は均衡賃金で仕事を見つけられると仮定していました. しかし, 実際の労働市場では失業, 働きたいが仕事が見つからない, といった現象が観察されます. DMP モデルは, こうした摩擦のある労働市場を考慮し, 失業を内生化するモデルです.

DMP モデルは, 今まで学んできた Solow, Ramsey, RBC, New Keynesian モデルの流れと直接のつながりがないため, 少し違和感を感じるかもしれません. しかし, その後の研究で, DMP モデルはこれら新古典派のモデルと組み合わされていき (Merz 1995; Andolfatto 1996), 代表的な研究として Krusell, Mukoyama, and Şahin (2010) のモデルがあります.

ちなみに, Diamond, Mortensen, Pissarides の 3 人は, 2010 年にノーベル経済学賞を受賞しています.

3.2 Stylized Facts

失業の定義

失業は 16 歳以上の労働力人口を以下の 3 つに分類して定義されます.

- E: Employed. 仕事を持っている人
- U: Unemployed. 仕事を持っていないが, 仕事を探している人
- N: Not in the Labor Force. 仕事を持っておらず, 仕事も探していない人

例えば, 学生や専業主婦, 引退した高齢者などが N に該当します. 失業率 u_t は以下のように定義されます.

$$u_t := \frac{U_t}{E_t + U_t}$$

図 3.2 はアメリカの失業率と NBER による不況期間 (グレー) を示しています. 失業率は不況期に上昇し, 景気回復

© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Peter A. Diamond

Prize share: 1/3

© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Dale T. Mortensen

Prize share: 1/3

© The Nobel Foundation. Photo: U. Montan

Christopher A. Pissarides

Prize share: 1/3

図 3.1: Nobel Prize in Economic Science 2010.

図 3.2: U.S. Bureau of Economics Analysis, Unemployment Rate UNRATE.

期に低下する傾向があることがわかります.[*1]

3.3　Model

3.3.1　設定

- 労働者は Employed (E) か Unemployed (U) のいずれかの状態にある
- それぞれの状態にある労働者の数を e_t と u_t とし, $e_t + u_t = 1$
- E から U への遷移確率を σ とし, U から E への遷移確率を λ とする

[*1] NBER の Business Cycle Dating には雇用に関する指数も含まれているため, ある意味当然の結果とも言えます.

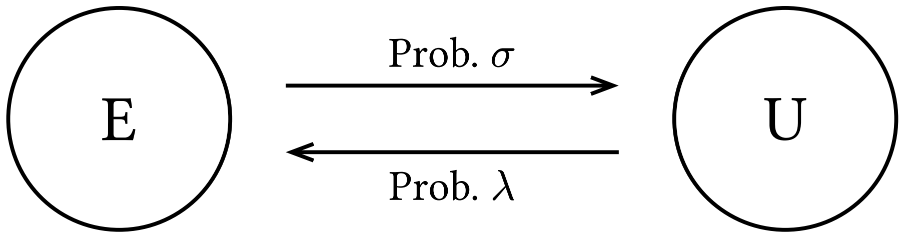


図 3.3: Employment and Unemployment

よって失業率 u_t の遷移は次のように表されます.

$$u_{t+1} = (1-\lambda)u_t + \sigma(1-u_t).$$

Steady state $u_{t+1} = u_t = \overline{u}$ について解くと,

$$\overline{u} = \frac{\sigma}{\lambda + \sigma}. \tag{3.1}$$

3.3.2 マッチング関数

マッチング関数

t 時点における失業者の数を u_t, 求人の数 (vacancy) を v_t とした時, $t+1$ の始めにおけるマッチの数 $\mathcal{M}_{t+1}$ は次のように表されます.

$$\mathcal{M}_{t+1} = M(u_t, v_t).$$

このマッチング関数 $M(u, v)$ は以下の性質を持ちます.

- u, v に対して単調増加
- Constant returns to scale
- $M(u, v) \leq u, v$

このマッチング関数は *Blackbox* な関数と言われます. 雇用に際しどのような要因でどのような摩擦があるのかなどに深入りせず, それらの摩擦を吸収した抽象的な関数として考えます.

労働者 (worker) が企業にマッチする確率は λ_w は以下のように表されます.

$$\lambda_w(\theta_t) = \frac{M(u_t, v_t)}{u_t} = M\left(1, \frac{v_t}{u_t}\right) = M(1, \theta_t).$$

この $\theta_t := \frac{v_t}{u_t}$ は労働市場の逼迫性 (labor market tightness) と呼ばれます. 例えば, 労働市場がタイト, θ_t が大きい場合, 求人が多く失業者が少ないことを意味し, 雇い主は高い賃金を提示して雇用しなければなりません. 逆に, 労

働市場が緩和, θ_t が小さい場合, 求人が少なく失業者が多いことを意味し, 雇い主は低い賃金でも労働者を雇うことができます. これを式 3.1 に代入すると,

$$\overline{u} = \frac{\sigma}{\lambda_w(v/\overline{u}) + \sigma}$$

であり, 変形すると

$$M(\overline{u}, v) + \sigma\overline{u} = \sigma. \tag{3.2}$$

この関係から, σ が定数であれば, (定常状態の) 失業率 $\overline{u}$ と 求人 v に負の関係があることがわかります. この関係を, **ベバリッジ曲線** (Beveridge Curve) と呼びます.

なお, 求人 v_t がマッチする確率を λ_f とすると,

$$\frac{M(u_t, v_t)}{v_t} = M\left(\frac{u_t}{v_t}, 1\right) = M\left(\frac{1}{\theta_t}, 1\right) =: \lambda_f(\theta_t).$$

3.3.3 ベバリッジ曲線とシフト

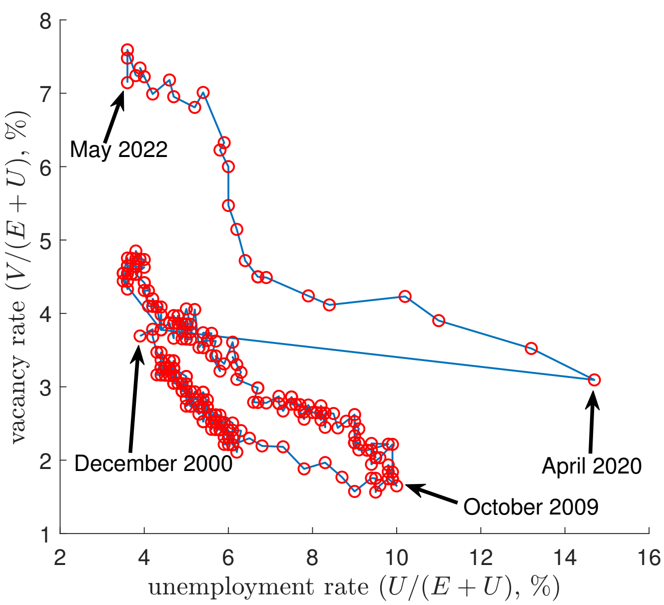


図 3.4: **Beveridge Curve in the United States** (Azzimonti et al. 2025, fig. 20.4)

図 3.4 は 2000 年以降のアメリカのベバリッジ曲線を示しています. グラフの中で, 3 つのベバリッジ曲線 Dec. 2000 - Oct. 2009, Oct. 2009 - Apr. 2020, Apr. 2020 - May 2022 とその間のシフトを見ることができます. シフトが起こった時期は, リーマンショックや Covid-19 の影響を受けた時期です.

ベバリッジ曲線のシフトの一つの解釈はマッチング関数の変化です. 例えば, マッチング関数が以下のコブ・ダグラス型であるとすると

$$M(u, v) = \chi u^{\eta} v^{1-\eta}, \tag{3.3}$$

ベバリッジ曲線は以下のように表されます.

$$v = \left(\frac{\sigma(1-\overline{u})}{\chi \overline{u}^{\eta}}\right)^{\frac{1}{1-\eta}}.$$

マッチングのしやすさを表す χ が小さくなったとき, ベバリッジ曲線が上にシフトすることがわかります.

3.3.4 労働市場均衡

ここで, 求人 v_t が決定する労働市場の均衡を考えます.

企業

- 無限期間の利益を最大化すると考える. 割引率を $\beta \in (0, 1)$ とする
- t 期の生産を z_t とし, マルコフ過程に従うとする
- 労働者に払う賃金を $w(z)$ とする
- 求人を出すコストを κ とする

十分な労働者がいる企業の価値関数を $J(z)$, 求人を行う企業の価値関数を $V(z)$ とすると

$$\begin{aligned} J(z) &= z - w(z) + \beta \mathbb{E}\left[(1-\sigma)J(z') + \sigma V(z') \mid z\right] \\ V(z) &= -\kappa + \beta \mathbb{E}\left[(1-\lambda_f(\theta))V(z') + \lambda_f(\theta)J(z') \mid z\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

ここでは, 企業が労働者にマッチする確率を $\lambda_f(\theta)$ とし,

$$\lambda_f(\theta) = \frac{M(u, v)}{v} = M\left(\frac{u}{v}, 1\right) = M\left(\frac{1}{\theta}, 1\right).$$

さらに, 求人はどの企業も自由に行うことができる (free entry) を仮定すると,

$$V(z) = 0. \tag{3.5}$$

よって, 式 3.4 から

$$\frac{\kappa}{\lambda_f(\theta)} = \beta \mathbb{E}[J(z')|z].$$

直感的には, 求人を出すコスト κ はマッチした時の期待値 $\beta\mathbb{E}[J(z')|z]$ とマッチする確率 $\lambda_f(\theta)$ の積で決まることと解釈できます.

労働者

- 無限期間の線形効用を最大化すると考える. 割引率は β.
- 雇用されている労働者の価値関数を $W(z)$, 失業している労働者の価値関数を $U(z)$ とする

$$\begin{aligned} W(z) &= w(z) + \beta\mathbb{E}[(1-\sigma)W(z') + \sigma U(z')|z] \\ U(z) &= b + \beta\mathbb{E}[\lambda_w(\theta)W(z') + (1-\lambda_w(\theta))U(z')|z]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

賃金交渉

- マッチした労働者と企業は賃金を交渉すると考える
- 一般ナッシュ交渉を仮定する

$$\max_w \left(\widetilde{W}(w,z) - U(z)\right)^{\gamma} \left(\tilde{J}(w,z) - V(z)\right)^{1-\gamma}.$$

ここで, $\widetilde{W}(w,z)$, $\tilde{J}(w,z)$ は今期の賃金が w の時の労働者と企業の価値関数を表します. そのため, 今までの表現 $W(z)$, $J(z)$ は, 均衡賃金 $w(z)$ をすでに考慮した書き方になっていたということです.

ここで, 一階条件をとると

$$(1-\gamma)\left(\widetilde{W}(w,z) - U(z)\right) = \gamma\left(\tilde{J}(w,z) - V(z)\right). \tag{3.7}$$

$U(z)$, $V(z)$ は労働者と企業からみた交渉決裂点 (disagreement point, outside option) であり, それと比べた場合の余剰 (surplus) を交渉力 $\gamma, 1-\gamma$ で重み付けて均等化しているということがわかります. もう一つの解釈は, 均衡における総余剰 $\mathcal{S}$ を以下のように定義した時,

$$\mathcal{S}(z) = \underbrace{W(z) - U(z)}_{\text{Worker Surplus}} + \underbrace{J(z) - V(z)}_{\text{Firm Surplus}},$$

一階条件 式 3.7 は以下のように書き換えられます.

$$\begin{aligned} W(z) &= U(z) + \gamma\mathcal{S}(z), \\ J(z) &= V(z) + (1-\gamma)\mathcal{S}(z). \end{aligned}$$

つまり, 労働者と企業は outside option に加えて, 総余剰のそれぞれの交渉力に応じた部分を得ることができるという解釈です.

均衡

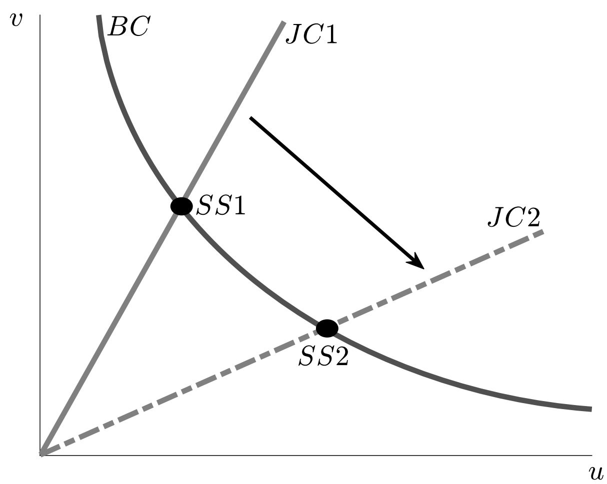
式 3.4, 式 3.5, 式 3.6, 式 3.7 によって均衡が定義されます. これらを整理すると, 次の Job Creation Condition (JC) が得られます.

$$\frac{\kappa}{(1-\gamma)\lambda_f(\theta_t)} = \beta\mathbb{E}\left[z_{t+1} - b + \frac{1-\sigma-\gamma\lambda_w(\theta_{t+1})}{1-\gamma}\frac{\kappa}{\lambda_f(\theta_{t+1})}\right]. \tag{3.8}$$

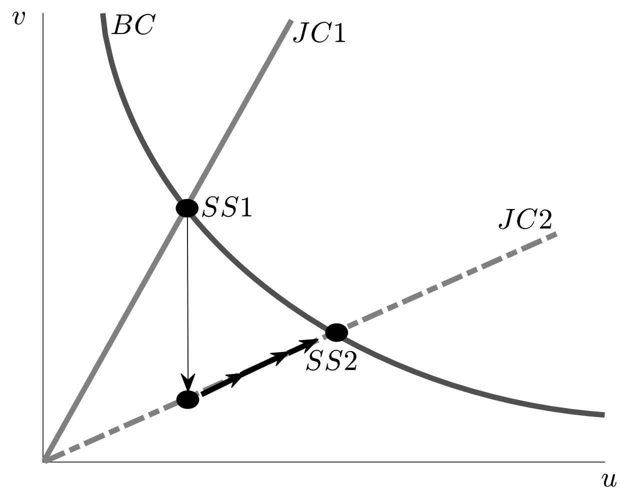
導出は 命題 B.4 を参照してください. ここで定常状態を考えると,

$$\frac{\kappa}{(1-\gamma)\lambda_f(\overline{\theta})} = \beta\mathbb{E}\left[\overline{z} - b + \frac{1-\sigma-\gamma\lambda_w(\overline{\theta})}{1-\gamma}\frac{\kappa}{\lambda_f(\overline{\theta})}\right]. \tag{3.9}$$

式 3.9 は定常状態の $\overline{\theta} = \frac{\overline{v}}{\overline{u}}$ を定める式とみなすことができます. したがって, 均衡における求人 v と失業率 u の関係は, 式 3.2 (BC) と式 3.9 (JC) の交点によって決定されます.



(a) Determination of Steady State



(b) Transition of Steady State

図 3.5: Figure 20.5 and 20.6 from Azzimonti et al. (2025).

図 3.5 の左図は, BC と JC_1 の交点によって失業率 $\overline{u}$ と求人 $\overline{v}$ が決定される様子を示しています (SS_1).

ここで予期しない恒常的な生産性の低下, $\overline{z}$ が下がったとします. すると 式 3.9 から $\overline{\theta}$ が下がり, JC_1 から JC_2 へシフトします. この時, 移行過程では右図のような変化が起きると考えることができます. 失業率 u はすぐには変化できないため, 求人 v が大きく低下します. その後, 失業率 u が徐々に上昇し, 新しい均衡点 SS_2 に到達します.

3.4 Calibration

3.4.1 Functional Forms

マッチング関数は 式 3.3 で表されると仮定し, 生産 z_t は以下のように表されるとします.

$$\hat{z}_{t+1} = \rho \hat{z}_t + \varepsilon_{t+1}$$

ここで, $\hat{z}_t$ は steady state $\bar{z}$ からの log-deviation, つまり

$$\hat{z}_t = \log z_t - \log \bar{z}.$$

3.4.2 Parameter Values

モデルのパラメータは先行研究に従い, 以下のように設定します.

表 3.1: Parameter values for the DMP model

Parameter	Value	Source
β	0.996	Cooley and Prescott (1995)
ρ	0.949	Hagedorn and Manovskii (2008)
σ_ε	0.0065	Hagedorn and Manovskii (2008)
σ	0.034	Shimer (2005)
χ	0.45	Shimer (2005)
b	0.4	Shimer (2005)
γ	0.72	Shimer (2005)
η	0.72	Shimer (2005)

- モデルの一期間は 1 ヶ月とする (Hagedorn and Manovskii (2008) では 1 週間)
- RBC モデルで標準的な 1 年の割引率 $\beta = 0.947$ (Cooley and Prescott 1995) を 1 ヶ月に直すと $0.947^{\frac{1}{12}} = 0.996$

3.5 Simulation

表 3.3: Model Statistics

		u	v	v/u	z
Standard Deviation		0.005	0.016	0.020	0.013
Quartely Autocorrelation		0.805	0.670	0.738	0.738
	u	1.000	-0.822	-0.893	-0.894
Correlation Matrix	v		1.000	0.990	0.990
	v/u			1.000	1.000
	z				1.000

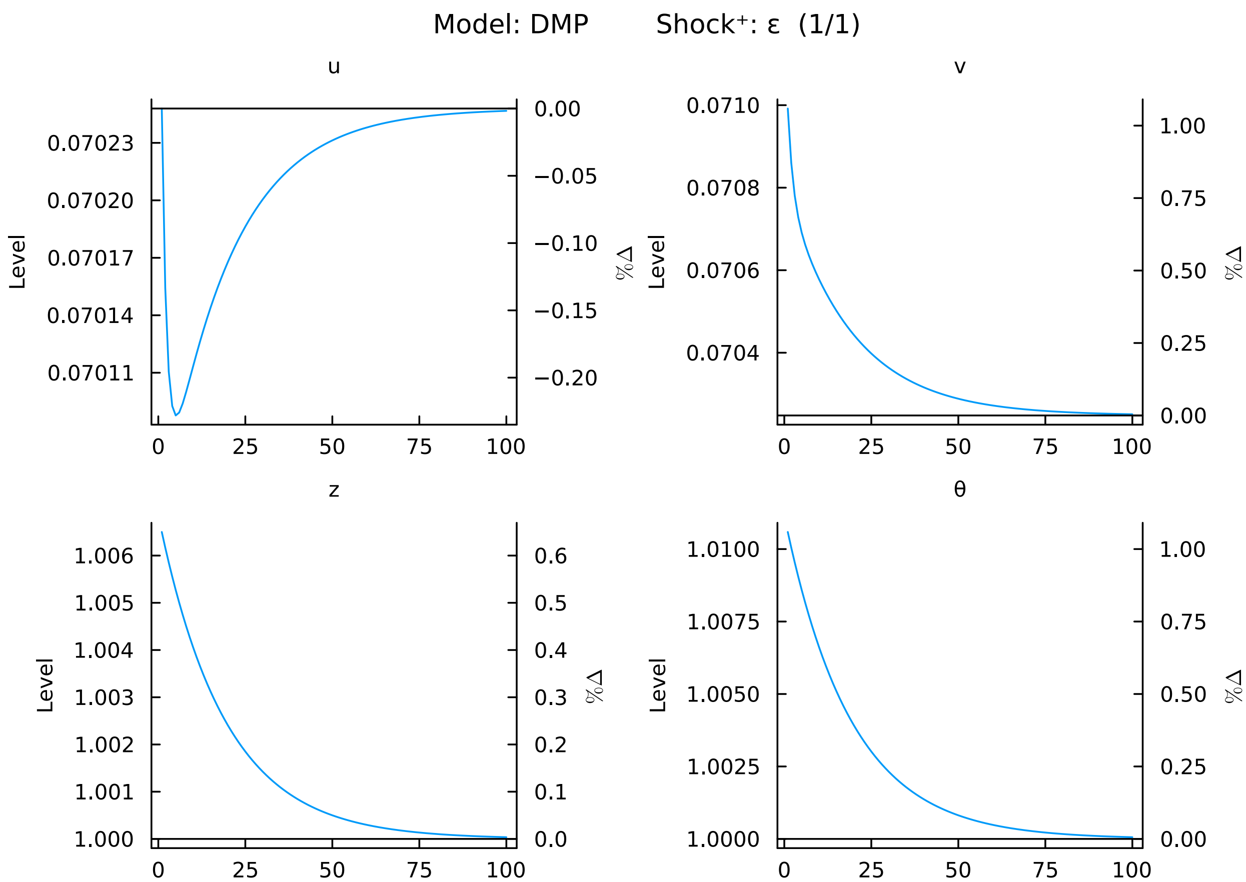


図 3.6: Impulse Response Functions of the DMP Model

表 3.2: **Summary Statistics for Quarterly U.S. Data from 1951 I to 2004 IV**. (Azzimonti et al. 2025, Table 19.2)

		u	v	v/u	z
Standard Deviation		0.125	0.139	0.259	0.013
Quarterly Autocorrelation		0.870	0.904	0.896	0.765
Correlation Matrix	u	1	−0.919	−0.977	−0.732
	v	—	1	0.982	0.460
	v/u	—	—	1	0.967
	z	—	—	—	1

表 3.3 はシミュレーションの結果を示しています. 表 3.2 と比較すると, 各パラメータの相関はおおむね一致しています. しかし, $u, v, \theta = v/u$ の標準偏差が実際のデータよりも小さくなっていることがわかります. この点は, DMP モデルの重要な課題の一つとして知られており, “Labor Market Volatility Puzzle”, あるいは Shimer Puzzle (Shimer 2005) と呼ばれます.

付録 A

Linearization

A.1 対数変化率

命題 A.1. ある実数 m が *0* に近い時, 以下の近似が成り立つ.

$$\log(1+m) \approx m.$$

この時, $\hat{x}_t$ を定常状態 x からの対数変化率とすると:

$$\begin{aligned}\hat{x}_t &:= \log x_t - \log x \\ &= \log\left(\frac{x_t}{x}\right) \\ &= \log\left(1+\frac{x_t - x}{x}\right) \\ &\approx \frac{x_t - x}{x}\end{aligned}$$

この, $\frac{x_t-x}{x}$ という量は, 定常状態 x からの変化率を表す量です. したがって, $\hat{x}_t = 0.01$ であれば, 定常状態 x から 1% の変化があったことを意味します. 論文によって, $\hat{x}_t := \log x_t - \log x$ と定義するか, $\hat{x}_t := \frac{x_t-x}{x}$ と定義するかは異なりますが, 近似的にはどちらも同じ意味持ちます.

図 A.1 にあるように, $\hat{x}_t$ は定常状態 x に十分近ければ, どちらの定義もほとんど同じ値をとることがわかります.

定理 A.1 (1 次近似)**.** *1* 変数関数 f の点 x において, 以下が成り立つ.

$$f(x_t) = f(x) + f'(x)(x_t - x) + R(x_t).$$

ここで, $R(x_t)$ は高次の剰余項であり, $\lim_{x_t \to x} \frac{R(x_t)}{|x_t - x|} = 0$ が成り立つ. したがって, x の近傍では剰余項が十分小さいため, 以下の近似が成り立つ.

$$f(x_t) \approx f(x) + f'(x)(x_t - x).$$

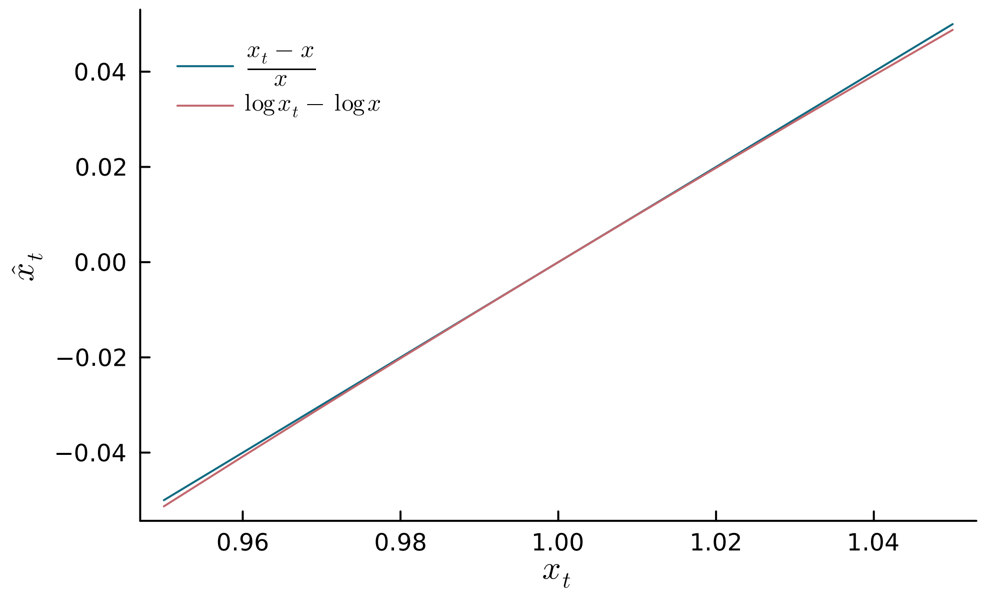


図 A.1: Approximation of the deviation from the steady state

多変数関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の場合も同様に近似できる.

$$f(\mathbf{x}_t) \approx f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})(x_{t,i} - x_i).$$

A.2　対数線形化

命題 A.2 (対数線形化の一般形)**.** $y_t = f(\mathbf{x}_t)$ の $\mathbf{x}$ 近傍での線形化は以下のように表される.

$$\hat{y}_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{x_i}{f(\mathbf{x})} \hat{x}_{i,t}.$$

証明

Step 1: 両辺の対数をとる.

$$\log y_t = \log f(\mathbf{x}_t)$$

Step 2: 両辺をそれぞれ一次近似する.

$$
\begin{aligned}
LHS &\approx \log y + \underbrace{\frac{1}{y}(y_t - y)}_{\hat{y}_t} \\
RHS &\approx \log f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{1}{f(\mathbf{x})}(x_{i,t} - x_i) \\
&= \log f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{x_i}{f(\mathbf{x})} \underbrace{\frac{x_{i,t} - x_i}{x_i}}_{\hat{x}_{i,t}}.
\end{aligned}
$$

Step 3: 定常状態 $\log y = \log f(\mathbf{x})$ を両辺から引く.

$$
\hat{y}_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{x_i}{f(\mathbf{x})} \hat{x}_{i,t}.
$$

A.2.1　例

例 A.1 (Cobb-Douglas Production Function)**.**

$$
Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \Rightarrow \hat{Y}_t \approx \hat{A}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t.
$$

Proof.

1. Log をとる
   - $\log Y_t = \log A_t + \alpha \log K_t + (1-\alpha) \log L_t$
2. 線形近似
   - $LHS = \log Y + \hat{Y}_t$
   - $RHS = \log A + \alpha \log K + (1-\alpha) \log L + \hat{A}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t$
3. 定常状態を引く
   - $\hat{Y}_t = \hat{A}_t + \alpha \hat{K}_t + (1-\alpha)\hat{L}_t$

□

例 A.2 (Ramsey Model)**.**

$$
\begin{aligned}
c_t^{-\sigma} &= \beta(1-\delta+\alpha k_t^{\alpha-1}) c_{t+1}^{-\sigma} \\
k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t &= c_t + k_{t+1}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\hat{c}_{t+1} &= \hat{c}_t + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{\sigma}\hat{k}_t \\
\hat{k}_{t+1} &= -\frac{c}{k}\hat{c}_t + \frac{1}{\beta}\hat{k}_t.
\end{aligned}
$$

Proof. **Step 1**: Log をとる

$$
\begin{aligned}
-\sigma \log c_t &= \log \beta + \log(1-\delta+\alpha k_t^{\alpha-1}) - \sigma \log c_{t+1} \\
\log(k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t) &= \log(c_t + k_{t+1})
\end{aligned}
$$

Step 2: 線形近似

$$
\begin{aligned}
LHS_1 &\approx -\sigma\hat{c}_t + LHS_1^* \\
RHS_1 &\approx \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{1-\delta+\alpha k^{\alpha-1}}\hat{k}_t + -\sigma\hat{c}_{t+1} + RHS_1^* \\
LHS_2 &\approx \frac{\alpha k^{\alpha-1}+1-\delta}{k^\alpha+(1-\delta)k}k\hat{k}_t + LHS_2^* \\
RHS_2 &\approx \frac{c}{c+k}\hat{c}_t + \frac{k}{c+k}\hat{k}_{t+1} + RHS_2^*
\end{aligned}
$$

なお, $LHS_1^*, RHS_1^*, LHS_2^*, RHS_2^*$ は定常状態における値 (次のステップで消去される).

Step 3: 定常状態を引く

$$
\begin{aligned}
-\sigma\hat{c}_t &= \frac{\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{1-\delta+\alpha k^{\alpha-1}}\hat{k}_t - \sigma\hat{c}_{t+1} \\
\frac{\alpha k^{\alpha-1}+1-\delta}{k^\alpha+(1-\delta)k}k\hat{k}_t &= \frac{c}{c+k}\hat{c}_t + \frac{k}{c+k}\hat{k}_{t+1}
\end{aligned}
$$

なお, 定常状態では

$$
\begin{aligned}
c^{-\sigma} &= \beta(1-\delta+\alpha k^{\alpha-1})c^{-\sigma} \\
k^\alpha + (1-\delta)k &= c + k
\end{aligned}
$$

が成り立つため, 整理すると以下を得ます.

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_{t+1} &= \hat{c}_t + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{\sigma}\hat{k}_t \\
\hat{k}_{t+1} &= -\frac{c}{k}\hat{c}_t + \frac{1}{\beta}\hat{k}_t.
\end{aligned}
$$

□

A.3 対数線形化のもう一つの方法

$y_t = f(\mathbf{x}_t)$ の対数線形化は以下のように行うこともできます. この場合は, $\hat{z}_t := \log x_t - \log x$ と定義します.

Step 1: $z_t = \exp(\log z_t)$ と置き換える.

$$\exp(\log y_t) = f(\exp(\log \mathbf{x}_t)).$$

Step 2: $\log z_t$ に対しての線形近似を行う.

$$
\begin{aligned}
LHS &\approx \exp(\log y) + \exp(\log y)(\log y_t - \log y) = y + y\hat{y}_t \\
RHS &\approx f(\exp(\log \mathbf{x})) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \log x_i}(\exp(\log \mathbf{x}))(\log x_{i,t} - \log x_i) \\
&= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial x_i}{\partial \log x_i}(\log x_{i,t} - \log x_i) \\
&= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) x_i \hat{x}_{i,t}.
\end{aligned}
$$

Step 3: 両辺から定常状態 $y = f(\mathbf{x})$ を引き, 定常状態で割る.

$$
\hat{y}_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{x_i}{f(\mathbf{x})} \hat{x}_{i,t}.
$$

よって, この方法でも同じ結果が得られます.

例 A.3 (Ramsey Model)**.**

$$
\begin{aligned}
c_t^{-\sigma} &= \beta(1 - \delta + \alpha k_t^{\alpha-1}) c_{t+1}^{-\sigma} \\
k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t &= c_t + k_{t+1}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\hat{c}_{t+1} &= \hat{c}_t + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{\sigma} \hat{k}_t \\
\hat{k}_{t+1} &= -\frac{c}{k}\hat{c}_t + \frac{1}{\beta}\hat{k}_t.
\end{aligned}
$$

Proof. **Step 1**: 置き換え

$$
\begin{aligned}
\exp(-\sigma \log c_t) &= \beta(1 - \delta + \alpha \exp((\alpha-1)\log k_t)) \exp(-\sigma \log c_{t+1}) \\
\exp(\alpha \log k_t) + (1-\delta)\exp(\log k_t) &= \exp(\log c_t) + \exp(\log k_{t+1})
\end{aligned}
$$

Step 2: 線形近似

$$
\begin{aligned}
LHS_1 &\approx LHS_1^* + \exp(-\sigma \log c)(-\sigma)(\log c_t - \log c) \\
&= LHS_1^* - \sigma c^{-\sigma} \hat{c}_t \\
RHS_1 &\approx RHS_1^* + \beta\alpha(\alpha-1)\exp(-\sigma \log c)\exp((\alpha-1)\log k)(\log k_t - \log k) \\
&\quad + \beta(1 - \delta + \alpha \exp((\alpha-1)\log k))\exp(-\sigma \log c)(-\sigma)(\log c_{t+1} - \log c) \\
&= RHS_1^* + \beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}c^{-\sigma}\hat{k}_t - \sigma\beta(1-\delta+\alpha k^{\alpha-1})c^{-\sigma}\hat{c}_{t+1} \\
LHS_2 &\approx LHS_2^* + (\alpha \exp(\alpha \log k) + (1-\delta)\exp(\log k))(\log k_t - \log k) \\
&= LHS_2^* + \left(\alpha k^{\alpha-1} + 1 - \delta\right) k\hat{k}_t \\
RHS_2 &\approx RHS_2^* + \exp(\log c)(\log c_t - \log c) + \exp(\log k)(\log k_{t+1} - \log k) \\
&= RHS_2^* + c\hat{c}_t + k\hat{k}_{t+1}
\end{aligned}
$$

Step 3: 定常状態を引き, 定常状態で割る

$$\hat{c}_{t+1} = \hat{c}_t + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{\sigma}\hat{k}_t$$
$$\hat{k}_{t+1} = -\frac{c}{k}\hat{c}_t + \frac{1}{\beta}\hat{k}_t.$$

ここで, $\frac{1}{\beta} = 1 - \delta + \alpha k^{\alpha-1}$ を用いた. □

A.4 (補論) 数値計算例

以下のラムゼイモデルのサドルパスを数値計算してみましょう.

$$\begin{aligned} c_t^{-\sigma} &= \beta(1-\delta+\alpha k_t^{\alpha-1})c_{t+1}^{-\sigma} \\ k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t &= c_t + k_{t+1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{c}_{t+1} &= \hat{c}_t + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{\sigma}\hat{k}_t \\ \hat{k}_{t+1} &= -\frac{c}{k}\hat{c}_t + \frac{1}{\beta}\hat{k}_t. \end{aligned}$$

パラメータは標準的な値 $\alpha = 0.36, \beta = 0.96, \delta = 0.1, \sigma = 1.5$ を使います.

```
(α = 0.36, β = 0.96, δ = 0.1, σ = 1.5)
```

定常状態は以下のように計算できます.

$$c = k^{\alpha} - \delta k$$
$$k = \left(\frac{1/\beta - (1-\delta)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

```
(4.294048197345121, 1.2603826653318553)
```

A.4.1 線形モデル

モデルは以下のように書き換えることができます.

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{k}_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-1}}{\sigma} \\ -\frac{c}{k} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{k}_t \end{pmatrix}$$

ここでは, $\hat{k}_0 = 0.01$ (定常状態から 1% の増加) からの変化を考えます. Saddle path 上の $\hat{c}_0$ を求めるために, 固有値分解を行います.

```
Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
values:
2-element Vector{Float64}:
```

```
 0.8886746067491774
 1.1529920599174894
vectors:
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.462214   0.354629
 -0.886768  -0.935007
```

固有値が 1 より小さいものが安定な挙動を示すので, 対応した固有ベクトルが saddle path であることがわかります. したがって, $\hat{c}_0$ は以下のように計算できます.

```
0.005212347782677869
```

初期値が分かったため, あとは M を使って順番に $\hat{c}_t, \hat{k}_t$ を求めていきます.

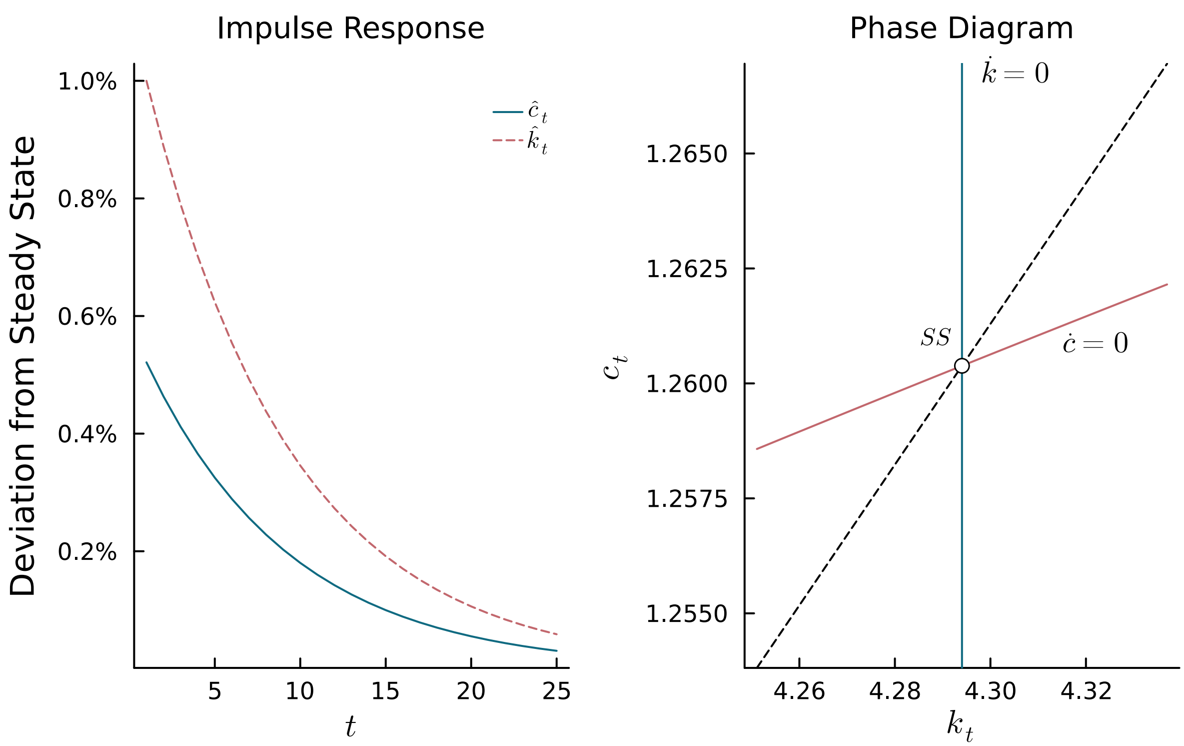


図 A.2: Impulse Response and Phase Diagram of the Ramsey Model (Linearized)

A.4.2 非線形モデル

非線形モデルは以下のように書き換えることができます.

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} &= (\beta(1-\delta+\alpha k_t^{\alpha-1}))^{\frac{1}{\sigma}} c_t \\
k_{t+1} &= k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t - c_t
\end{aligned}
$$

線形モデルと異なり, 非線形モデルでは Saddle path の解析解が得られないため, $\hat{k}_0 = 0.01$ に対応した c_0 を数値的に求める必要があります. ここでは十分長い期間 ($T = 100$) に定常状態に収束すると考えて c_0 の値を求める

Shooting Method を使います.

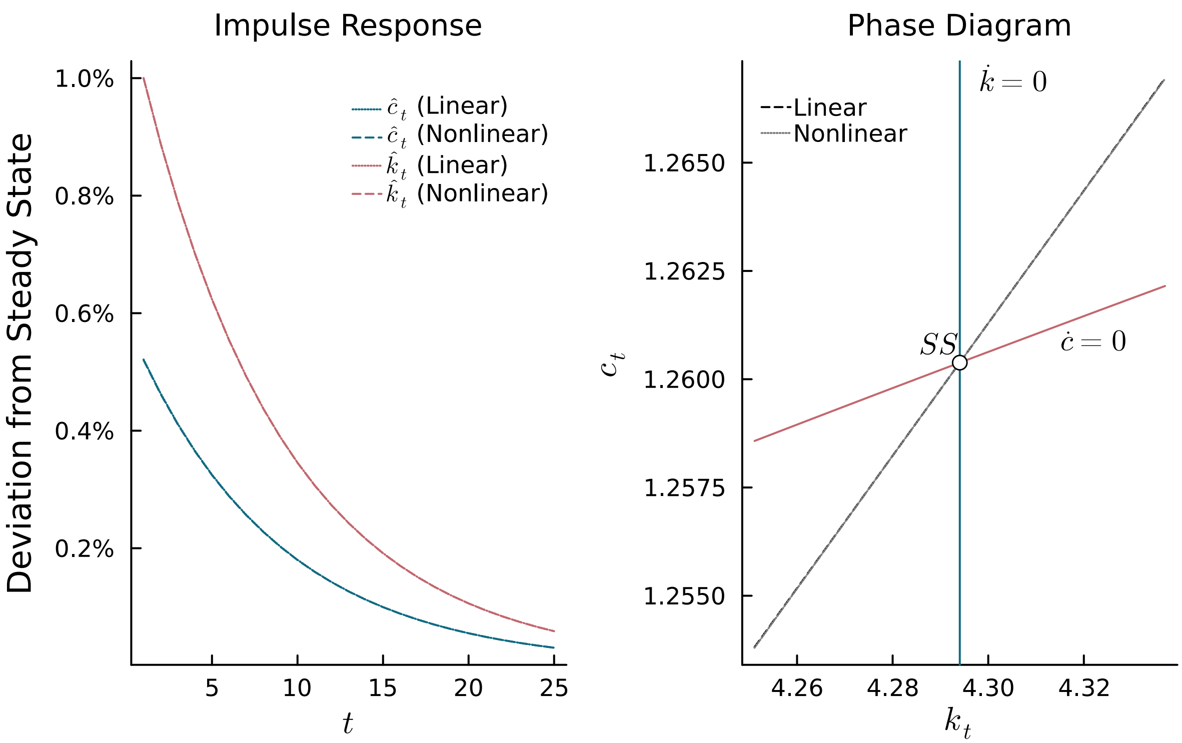


図 A.3: Impulse Response and Phase Diagram of the Ramsey Model (Nonlinearized)

図 A.3 に示すように, 線形化モデルと非線形モデルの IRF や Saddle Path はほとんど一致していることがわかります.

付録 B

Remained Proofs

B.1 RBC Model

B.2 New Keynesian Model

命題 B.1 (CES 生産関数における価格指数)**.** 最終財の価格 P_t は中間財の価格 $P_{j,t}$ を用いて以下のように表される*:*

$$P_t = \left(\int_0^1 P_{j,t}^{1-\varepsilon} \, dj \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

また, 各中間財の需要 $Y_{j,t}$ は以下のように表される*:*

$$Y_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\varepsilon} Y_t.$$

Proof. 最終財の生産者が Y_t 単位の最終財を生産する時の費用最小化問題を考える.

$$\min_{\{Y_{j,t}\}_{j=0}^1} \int_0^1 P_{j,t} Y_{j,t} \, dj \quad \text{s.t.} \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, dj \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = Y_t.$$

$$\mathcal{L} = \int_0^1 P_{j,t} Y_{j,t} \, dj + \lambda_t \left(Y_t - \left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, dj \right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \right)$$

FOC:

$$\begin{aligned} P_{j,t} &= \lambda_t \underbrace{\left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, dj \right)^{\frac{1}{\varepsilon-1}}}_{=Y_t^{\frac{1}{\varepsilon}}} Y_{j,t}^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\ &= \lambda_t \left(\frac{Y_{j,t}}{Y_t} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

両辺に $Y_{j,t}$ を掛けて, j で積分すると

$$\int_{j=0}^{1} P_{j,t} Y_{j,t}\, dj = \lambda_t Y_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \underbrace{\int_{j=0}^{1} Y_{j,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\, dj}_{=Y_t^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}} = \lambda_t Y_t$$

ここで $\int_{j=0}^{1} P_{j,t} Y_{j,t}\, dj = \lambda_t Y_t$ という表現を見ると, 左辺は最終財を生産するための費用であることから, λ_t は最終財の価格と解釈できることがわかります.

ここで 式 B.1 の両辺を $1-\varepsilon$ 乗して, j について積分し, $\frac{1}{1-\varepsilon}$ 乗すると

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 P_{j,t}^{1-\varepsilon}\, dj\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}} &= \lambda_t Y_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \underbrace{\left(\int_0^1 Y_{j,t}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\, dj\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}_{Y_t^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \\ &= \lambda_t.\end{aligned}$$

また, 式 B.1 に $\lambda_t = P_t$ を代入すると以下を得る.

$$Y_{j,t} = \left(\frac{P_{j,t}}{P_t}\right)^{-\varepsilon} Y_t.$$

□

命題 B.2 (New Keynesian IS Curve の対数線形化)**.**

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t \left[\frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} C_{t+1}^{-\sigma}\right] \Rightarrow \hat{C}_t = \mathbb{E}_t[\hat{C}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - \log\beta - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]\right).$$

Proof. 期待値記号を無視して両辺の対数を取ると,

$$-\sigma \log C_t = \log\beta + \log(1+i_t) - \log(1+\pi_{t+1}) - \sigma \log C_{t+1}.$$

$$\begin{aligned} LHS &\approx -\sigma \log C - \sigma \frac{1}{C}(C_t - C) = -\sigma \log C - \sigma \hat{C}_t \\ RHS &\approx \log\beta + i_t - \pi_{t+1} - \sigma \log C - \sigma \frac{1}{C}(C_{t+1} - C) \\ &= \log\beta + i_t - \pi_{t+1} - \sigma \log C - \sigma \hat{C}_{t+1}. \end{aligned}$$

$LHS = RHS$ であるので,

$$\hat{C}_t = \mathbb{E}_t[\hat{C}_{t+1}] - \frac{1}{\sigma}\left(i_t + \log\beta - \mathbb{E}_t[\pi_{t+1}]\right).$$

□

命題 B.3 (New Keynesian Phillips Curve の対数線形化)**.**

$$(1-MC_t^r)\varepsilon = 1-\varphi\pi_t(1+\pi_t)+\varphi\beta\mathbb{E}_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\sigma}\pi_{t+1}(1+\pi_{t+1})\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right]$$

これを対数線形化すると,

$$\pi_t = \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right]+(1-\beta)\pi+\frac{\varepsilon-1+(1-\beta)\varphi\pi(1+\pi)}{\varphi(1+\pi)(1+2\pi)}\widehat{MC^r}_t+\frac{\beta\pi}{\varphi(1+2\pi)}\mathbb{E}\left[\Delta\hat{Y}_{t+1}-\sigma\Delta\hat{C}_{t+1}\right]$$

Proof. NK-IS では丁寧に導出したので, やや省略します.

$$LHS = (1-\exp(\log MC_t^r))\varepsilon \approx (1-MC^r)\varepsilon-\varepsilon MC^r\widehat{MC^r}_t.$$

$RHS = 1-RHS_1+\varphi\beta\mathbb{E}_t\left[RHS_2\right]$ とします.

$$\begin{aligned}
RHS_1 &= \varphi(\exp(\log(1+\pi_t))-1)\exp(\log(1+\pi_t))\\
&\approx \varphi\pi(1+\pi)+\varphi((1+\pi)^2+\pi(1+\pi))(\pi_t-\pi),\\
RHS_2 &= \exp(-\sigma\Delta\hat{C}_{t+1})(\exp(\log(1+\pi_{t+1}))-1)\exp(\log(1+\pi_t))\exp(\Delta\hat{Y}_{t+1})\\
&\approx \pi(1+\pi)+\pi(1+\pi)\left(-\sigma\Delta\hat{C}_{t+1}+\Delta\hat{Y}_{t+1}\right)+((1+\pi)^2+(1+\pi)\pi)(\pi_{t+1}-\pi).
\end{aligned}$$

$LHS = RHS$ であり, 定常状態 $(1-MC^r)\varepsilon = 1-(1-\beta)\varphi\pi(1+\pi)$ を用いると,

$$\begin{aligned}
-\varepsilon MC^r\widehat{MC^r}_t &= -\varphi\left((1+\pi)^2+\pi(1+\pi)\right)(\pi_t-\pi)\\
&\quad+\varphi\beta\pi(1+\pi)\mathbb{E}_t\left[-\sigma\Delta\hat{C}_{t+1}+\Delta\hat{Y}_{t+1}\right]\\
&\quad+\varphi\beta\left((1+\pi)^2+(1+\pi)\pi\right)\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}-\pi\right].
\end{aligned}$$

全体を $\varphi((1+\pi)^2+\pi(1+\pi)) = \varphi(1+\pi)(1+2\pi)$ で割ると,

$$\begin{aligned}
\pi_t-\pi &= \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}-\pi\right]+\frac{\varepsilon MC^r}{\varphi(1+\pi)(1+2\pi)}\widehat{MC^r}_t+\frac{\beta\pi}{\varphi(1+2\pi)}\mathbb{E}_t\left[-\sigma\Delta\hat{C}_{t+1}+\Delta\hat{Y}_{t+1}\right]\\
\pi_t &= \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right]+(1-\beta)\pi+\frac{\varepsilon-1+(1-\beta)\varphi\pi(1+\pi)}{\varphi(1+\pi)(1+2\pi)}\widehat{MC^r}_t+\frac{\beta\pi}{\varphi(1+2\pi)}\mathbb{E}_t\left[\Delta\hat{Y}_{t+1}-\sigma\Delta\hat{C}_{t+1}\right].
\end{aligned}$$

□

補題 B.1 (産出ギャップの対数線形化)**.** 産出ギャップ $\tilde{Y}_t := \log Y_t-\log Y_t^n$ は, 定常状態のゼロインフレ *(*$\pi = 0$*)* において, 以下のように線形化される.

$$\tilde{Y}_t = \hat{Y}_t-\hat{Y}_t^n.$$

Proof. ゼロインフレにおいては, 価格改訂のコストの有無は産出に影響を与えないため, sticky price の均衡と flexible price の均衡は等しくなる. したがって, $Y = Y^n$ であるため,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_t &:= \log Y_t - \log Y_t^n \\ &= (\underbrace{\log Y_t - \log Y}_{=:\hat{Y}_t}) - (\underbrace{\log Y_t^n - \log Y^n}_{=:\hat{Y}_t^n}).\end{aligned}$$

□

補題 B.2 (実質限界費用ギャップと産出ギャップの関係)**.** 実質限界費用ギャップ $\widehat{MC^r}_t$ と産出ギャップ $\tilde{Y}_t$ の関係は以下のように表される.

$$\widehat{MC^r}_t = (\sigma + \phi)\tilde{Y}_t.$$

Proof.

- $Y_t = A_t N_t$ より, $N_t = \frac{Y_t}{A_t}$
- 式 2.1 より, $\frac{W_t}{P_t} = C_t^\sigma N_t^\phi$
- $MC_t^r = \frac{W_t}{A_t P_t}$

よって, 以下の式を得ます.

$$MC_t^r = A_t^{-(\phi+1)} Y_t^{\sigma+\phi}.$$

対数線形化すると,

$$\widehat{MC^r}_t = -(\phi + 1)\hat{A}_t + (\sigma + \phi)\hat{Y}_t.$$

式 2.3 より,

$$\hat{Y}_t^n = \frac{1+\phi}{\phi+\sigma}\hat{A}_t \Rightarrow (1+\phi)\hat{A}_t = (\phi+\sigma)\hat{Y}_t^n.$$

よって, 補題 B.1 を用いて,

$$\widehat{MC^r}_t = (\sigma+\phi)(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n) = (\sigma+\phi)\tilde{Y}_t.$$

□

補題 B.3 (IS-MP-PC の行列表現)**.** 式 *2.6*, 式 *2.7*, 式 *2.8* を整理すると以下を得る.

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \omega \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma & 1-\beta\phi_\pi \\ \sigma\kappa & \kappa+\beta(\sigma+\phi_y) \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} \mathbb{E}_t\left[\tilde{Y}_{t+1}\right] \\ \mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] \end{pmatrix} + \omega \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \left(\hat{r}_t^n - \eta_t\right).$$

ここで, $\omega := (\sigma + \phi_y + \phi_\pi\kappa)^{-1}$, $\hat{r}_t^n := r_t^n - r^n$ である.

Proof. 式 2.6 を σ 倍し, 式 2.8 を代入すると,

$$\sigma\tilde{Y}_t = \sigma\mathbb{E}_t[\tilde{Y}_{t+1}] - \phi_\pi\pi_t - \phi_y\tilde{Y}_t - \eta_t + \mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \underbrace{r_t^n - r^n}_{=:\hat{r}_t^n}.$$

式 2.7 を代入すると,

$$\sigma\tilde{Y}_t = \sigma\mathbb{E}_t[\tilde{Y}_{t+1}] - \phi_\pi\kappa\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] - \phi_\pi\kappa\tilde{Y}_t - \phi_y\tilde{Y}_t - \eta_t + \mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right].$$

よって, $\omega := (\sigma + \phi_y + \phi_\pi\kappa)^{-1}$ を用いて,

$$\tilde{Y}_t = \omega\sigma\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_{t+1}\right] + \omega(1-\beta\phi_\pi)\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \omega\left(\hat{r}_t^n - \eta_t\right).$$

これを 式 2.7 に代入すると,

$$\begin{aligned} \pi_t &= \beta\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \omega\sigma\kappa\mathbb{E}_t\left[\tilde{Y}_{t+1}\right] + \kappa\omega(1-\beta\phi_\pi)\mathbb{E}_t\left[\pi_{t+1}\right] + \kappa\omega\left(\hat{r}_t^n - \eta_t\right) \\ &= \omega\sigma\kappa\mathbb{E}_t\left[\tilde{Y}_{t+1}\right] + \left(\beta + \kappa\omega(1-\beta\phi_\pi)\right)\mathbb{E}_t[\pi_{t+1}] + \omega\kappa\left(\hat{r}_t^n - \eta_t\right). \end{aligned}$$

ここで, 次の式が成り立つので命題は証明された.

$$\begin{aligned} \beta + \kappa\omega(1-\beta\phi_\pi) &= \omega\kappa + \omega\beta(\omega^{-1} - \phi_\pi\kappa) \\ &= \omega\kappa + \omega\beta(\sigma + \phi_y). \end{aligned}$$

□

B.3 DMP Framework

命題 B.4 (Job Creation Condition)**.** 式 *3.4*, 式 *3.5*, 式 *3.6*, 式 *3.7* より, 次の式を得る.

$$\frac{\kappa}{(1-\gamma)\lambda_f(\theta_t)} = \beta\mathbb{E}\left[z_{t+1} - b + \frac{1-\sigma-\gamma\lambda_w(\theta_{t+1})}{1-\gamma}\frac{\kappa}{\lambda_f(\theta_{t+1})}\right].$$

Proof. ここでは, $w(z)$ を w と省略し, $\mathbb{E}[\cdot|z]$ を $\mathbb{E}[\cdot]$ と省略します. 式 3.4 に式 3.5 を代入すると,

$$J(z) = z - w + \beta\mathbb{E}[(1-\sigma)J(z')], \tag{B.2}$$

$$\frac{\kappa}{\lambda_f(\theta)} = \beta\mathbb{E}[J(z')]. \tag{B.3}$$

式 3.6 の差分を取り, $1-\gamma$ をかけると

$$(1-\gamma)(W(z)-U(z)) = (1-\gamma)(w-b) + \beta\mathbb{E}[(1-\gamma)(1-\sigma-\lambda_w(\theta))(W(z')-U(z'))]. \tag{B.4}$$

式 B.4 に 式 3.7 と 式 3.5 を代入して,

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}J(z) = w - b + \beta\mathbb{E}\left[\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-\sigma-\lambda_w(\theta))J(z')\right]. \tag{B.5}$$

式 B.2 と 式 B.5 を足して, 式 B.3 を代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\gamma}J(z) &= z - b + \beta\mathbb{E}\left[\frac{1-\sigma-\gamma\lambda_w(\theta)}{1-\gamma}J(z')\right] \\ &= z - b + \frac{1-\sigma-\gamma\lambda_w(\theta)}{1-\gamma}\frac{\kappa}{\lambda_f(\theta)}.\end{aligned} \tag{B.6}$$

式 B.6 に β をかけ, t を $t+1$ に置き換えて期待値を取ると,

$$\frac{1}{1-\gamma}\beta\mathbb{E}[J(z')] = \beta\mathbb{E}\left[z' - b + \frac{1-\sigma-\gamma\lambda_w(\theta')}{1-\gamma}\frac{\kappa}{\lambda_f(\theta')}\right]. \tag{B.7}$$

式 B.7 に 式 B.3 を代入すると, 命題の式を得る. □

付録 C

Foundations

C.1 AR(1) Process

AR(1) 過程

AR(1) 過程 $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ は以下のように表される.

$$x_{t+1} = \bar{x} + \rho x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \overset{\text{iid}}{\sim} (0, \sigma^2).$$

平均 0 で分散 σ^2 (有限) の i.i.d. な確率変数 (ε_t) は特にホワイトノイズ (white noise) と言います. 以下の内容は, ホワイトノイズであれば同様に成り立ちますが, 実務上は正規分布 $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ を仮定することが多いです.

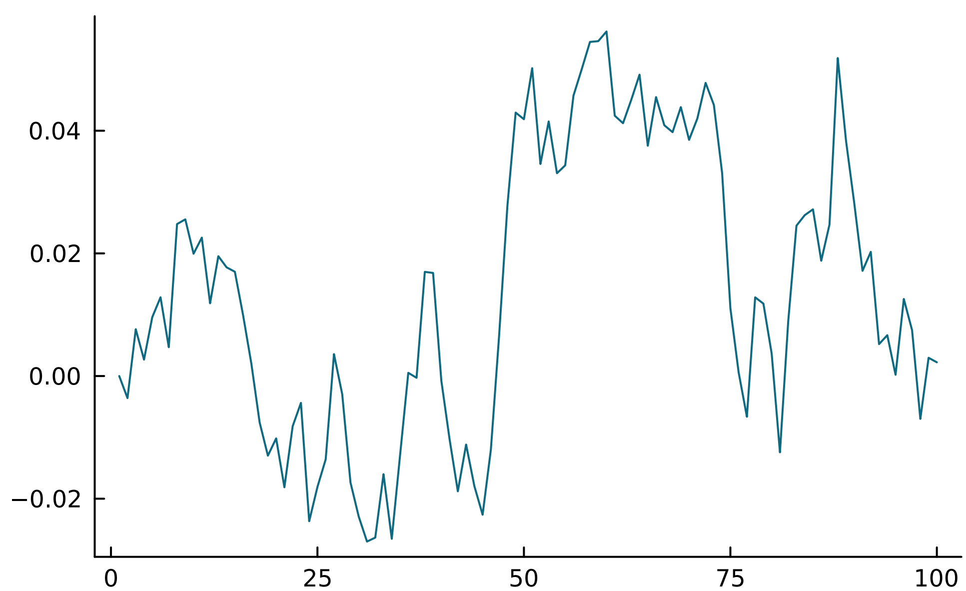


図 C.1: AR(1) 過程のシミュレーション. $\bar{x} = 0, \rho = 0.9, \sigma = 0.01.$

命題 C.1 (AR(1) 過程の平均と分散)**.**

$$\mathbb{E}[x_t] = \frac{\bar{x}}{1-\rho}, \quad Var(x_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}.$$

証明

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_{t+1}] &= \mathbb{E}[\bar{x} + \rho x_t + \varepsilon_t] = \bar{x} + \rho\mathbb{E}[x_t] + 0 \\ \mathrm{Var}(x_{t+1}) &= \mathrm{Var}(\bar{x} + \rho x_t + \varepsilon_t) = 0 + \rho^2\mathrm{Var}(x_t) + \sigma^2. \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[x_{t+1}] = \mathbb{E}[x_t]$ かつ, $\mathrm{Var}(x_{t+1}) = \mathrm{Var}(x_t)$ より, 証明された.

命題 C.2 (AR(1) 過程の自己共分散 (Autocovariance))**.**

$$Cov(x_t, x_{t+k}) = \frac{\rho^k}{1-\rho^2}\sigma^2.$$

証明

$k = 1$ の時,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(x_t, x_{t+1}) &= \mathrm{Cov}(x_t, \bar{x} + \rho x_t + \varepsilon_t) \\ &= \mathrm{Cov}\rho(x_t, x_t) + \mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_t) \\ &= \rho\mathrm{Var}(x_t) + 0 \\ &= \frac{\rho}{1-\rho^2}\sigma^2. \end{aligned}$$

$k = l + 1$ の時, $\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+l}) = \frac{\rho^l}{1-\rho^2}\sigma^2$ として,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(x_t, x_{t+l+1}) &= \mathrm{Cov}(x_t, \bar{x} + \rho x_{t+l} + \varepsilon_{t+l}) \\ &= \mathrm{Cov}(x_t, \bar{x}) + \mathrm{Cov}(x_t, \rho x_{t+l}) + \mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_{t+l}) \\ &= 0 + \rho\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+l}) + 0 \\ &= \frac{\rho^{l+1}}{1-\rho^2}\sigma^2. \end{aligned}$$

C.2　Labor Supply

C.2.1　Static Model

まずは静学的な労働供給モデルを考えます. 家計は以下の効用最大化問題を解きます:

$$\max_{c,h} u(c, h) \quad \text{s.t. } c \leq wh + I. \tag{C.1}$$

ここで, 消費 $c \geq 0$, 労働供給 $h \geq 0$, 賃金率 $w > 0$, 非労働所得 $I \geq 0$ です. また, 賃金率 w と非労働所得 I に対する労働供給を $h(w, I)$ とします. この時, 労働供給の弾力性は以下で定義されます:

$$\eta_{h,w}^{M} = \frac{\partial h(w,I)}{\partial w}\frac{w}{h(w,I)}$$
$$\eta_{h,I} = \frac{\partial h(w,I)}{\partial I}\frac{I}{h(w,I)}$$

特に, 所得を一定とした時の賃金弾力性 $\eta_{h,w}^{M}$ をマーシャリアン弾力性 (Marshallian elasticity) と呼びます. 次に, 労働供給の代替効果と所得効果を分離するために, ヒックス弾力性 (Hicksian elasticity) を導入します. 家計は以下の支出最小化問題を解きます:

$$\min_{c,h} c - wh \quad \text{s.t. } u(c,h) \geq \bar{u}.$$

ここで, 効用水準 $\bar{u}$ に対する労働供給を $h^H(w,\bar{u})$ とします. この時, ヒックス弾力性は以下で定義されます:

$$\eta_{h,w}^{H} = \frac{\partial h^H(w,\bar{u})}{\partial w}\frac{w}{h^H(w,\bar{u})}.$$

スルツキーの恒等式 (Slutsky Equation)

所得 I, 価格ベクトル $\mathbf{p}$ のもとで次の家計の効用最大化問題を考える.

$$\max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \leq I.$$

この時, 財 i の最適消費を $x_i(\mathbf{p}, I)$ とする. また, 効用水準 $\bar{u}$ に対する支出最小化問題を考える.

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{p}^\top \mathbf{x} \quad \text{s.t. } u(\mathbf{x}) \geq \bar{u}.$$

この時, 財 i の最適消費を $x_i^H(\mathbf{p}, \bar{u})$ とし, 支出関数を $I(\mathbf{p}, \bar{u})$ とする. 連鎖律から次の式を得る.

$$\frac{\partial x_i^H(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, I(\mathbf{p},\bar{u}))}{\partial p_i} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, I(\mathbf{p},\bar{u}))}{\partial I(\mathbf{p},\bar{u})}\frac{\partial I(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_i}$$

また, シェファードの補題 (Shephard's lemma) $\frac{\partial I(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_i} = x_i^H(\mathbf{p},\bar{u})$ より,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^H(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_i} - \frac{\partial x_i(\mathbf{p},I)}{\partial I}x_i^H(\mathbf{p},\bar{u}).$$

これをスルツキーの恒等式 (Slutsky equation) と呼ぶ.

労働供給の問題は価格 1 の財と価格 $-w$ の労働の 2 財問題とみなせるため,

$$\frac{\partial h(w,I)}{\partial w} = \frac{\partial h^H(w,\bar{u})}{\partial w} + \frac{\partial h(w,I)}{\partial I}h^H(w,\bar{u}).$$

ここで, 価格が負であるためシェファードの補題が $\frac{\partial I(w,\bar{u})}{\partial w} = -h^H(w,\bar{u})$ となることに注意してください. 全体を $\frac{w}{h}$ で掛けると[*1],

$$\underbrace{\frac{\partial h(w,I)}{\partial w}\frac{w}{h}}_{\eta^M_{h,w}} = \underbrace{\frac{\partial h^H(w,\bar{u})}{\partial w}\frac{w}{h}}_{\eta^H_{h,w}} + \underbrace{\frac{\partial h(w,I)}{\partial I}\frac{I}{h}}_{\eta_{h,I}}\frac{wh}{I}.$$

この式は, 労働供給の弾力性が次の代替効果と所得効果の和に分解されることを示しています.

- **代替効果**: 賃金の増加によって労働のリターンが増加し, 労働供給を増やす効果. 余暇の価格 (労働の機会費用) の増加に対する財への代替と考えてもよい
- **所得効果**: 所得の増加によって働く必要がなくなり, 労働供給を減らす効果. 余暇が正常財である場合, 所得の増加によって余暇の消費が増加し, 労働供給が減少すると考えてもよい

例 C.1 (Cobb-Douglas Utility)**.**

$$\max_{c,l}(1-\phi)\log c + \phi \log l \quad \text{s.t. } c \leq w(1-l) + I.$$

$$\eta^M_{h,w} = \frac{\phi}{w}\frac{I}{h},$$

- 代替効果: $\eta^H_{h,w} = \frac{\phi}{w}\frac{I}{h} + \phi$
- 所得効果: $\eta_{h,I}\frac{wh}{I} = -\phi$

$I = 0$ の時, 代替効果 ϕ と所得効果 ϕ が打ち消しあい, 労働供給の賃金弾力性は 0 となる.

Proof. 最適条件より,

$$h(w,I) = 1 - \phi\left(1 + \frac{I}{w}\right).$$

よって,

$$\eta^M_{h,w} = \frac{\partial h(w,I)}{\partial w}\frac{w}{h(w,I)} = \frac{\phi I}{w^2}\frac{w}{h(w,I)} = \frac{\phi}{w}\frac{I}{h(w,I)}$$
$$\eta_{h,I} = \frac{\partial h(w,I)}{\partial I}\frac{I}{h(w,I)} = -\frac{\phi}{w}\frac{I}{h(w,I)}.$$

スルツキーの恒等式より,

$$\eta^H_{h,w} = \eta^M_{h,w} - \eta_{h,I}\frac{wh(w,I)}{I} = \frac{\phi}{w}\frac{I}{h(w,I)} + \phi.$$

費用最小化問題

[*1] 均衡において $h(w,I) = h^H(w,\overline{u})$ であるため, 右辺の $h(w,I)$ を $h^H(w,\overline{u})$ に置き換えても問題ありません.

スルツキーの恒等式を確認するために, ヒックス弾力性を定義から計算する.

$$\min_{c,l} c - w(1-l) \quad \text{s.t. } (1-\phi)\log c + \phi \log l \geq \bar{u}.$$

ラグランジアン $\mathcal{L} = c - w(1-l) + \lambda\left(\bar{u} - (1-\phi)\log c - \phi\log l\right)$ の最適条件は次の通り.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} &= 1 - \lambda\frac{1-\phi}{c} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} &= w - \lambda\frac{\phi}{l} = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \bar{u} - (1-\phi)\log c - \phi\log l = 0.
\end{aligned}$$

一階条件から, $c = \frac{1-\phi}{\phi}wl$ より, 効用制約に代入すると,

$$\bar{u} = (1-\phi)\log\left(\frac{1-\phi}{\phi}wl\right) + \phi\log l = (1-\phi)\log\left(\frac{1-\phi}{\phi}w\right) + \log l.$$

よって, 関数 $A(\bar{u};\phi)$ を用いて, $l = A(\bar{u};\phi)w^{-(1-\phi)}$ と表せるので,

$$h^H(w,\bar{u}) = 1 - A(\bar{u};\phi)w^{-(1-\phi)}.$$

ヒックシアン弾力性は定義から,

$$\begin{aligned}
\eta^H_{h,w} &= \frac{\partial h^H(w,\bar{u})}{\partial w}\frac{w}{h^H(w,\bar{u})} \\
&= (1-\phi)A(\bar{u};\phi)w^{-(1-\phi)-1}\frac{w}{h^H(w,\bar{u})} \\
&= (1-\phi)\frac{1-h^H(w,\bar{u})}{h^H(w,\bar{u})} && \because 1-h^H(w,\bar{u}) = A(\bar{u};\phi)w^{-(1-\phi)}
\end{aligned}$$

ここで一階条件から $1 - h^H(w,\bar{u}) = \frac{\phi}{1-\phi}\frac{c}{w}$ であり, 均衡における予算制約 $c = wh^H(w,\bar{u}) + I$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\eta^H_{h,w} &= \frac{\phi}{w}\frac{c}{h^H(w,\bar{u})} \\
&= \frac{\phi}{w}\frac{wh^H(w,\bar{u}) + I}{h^H(w,\bar{u})} \\
&= \frac{\phi}{w}\frac{I}{h^H(w,\bar{u})} + \phi.
\end{aligned}$$

□

C.2.2 Dynamic Model

次の動学的労働供給モデルを考えます:

$$V(a) = \max_{c,h,a'} u(c,h) + \beta V(a') \quad \text{s.t. } c + a' = (1+r)a + wh.$$

ここで, $I := (1+r)a - a'$ と置くと, 静学的な労働供給モデル (C.1) と同じ形になります. 動学的な労働供給モデルにおける賃金弾力性には, 主に次の 3 種類があります.

1. Marshallian 弾力性: 所得を一定とした下での労働供給の弾力性
2. Hicksian 弾力性: 効用のレベルを一定とした下での労働供給の弾力性
3. Frisch 弾力性: 限界効用を一定にした下での労働供給の弾力性

Marshallian & Hicksian Elasticities

Marshallian 弾力性は, 静学的な労働供給と同様に定義することが可能です. 直感的には, 賃金が下落した際に貯金を切り崩すといった埋め合わせ (compensation) 行動は可能ですが, その点を考慮せずに, 所得 I を一定とした下での労働供給の弾力性として定義されます. その意味で Marshallian 弾力性は uncompesated elasticity とも呼ばれます.

Hicksian 弾力性も静学的な労働供給と同様に定義することが可能です. 賃金が下落した際に貯金を切り崩すことで効用水準を一定に保つ状況を考えるという意味で, Hicksian 弾力性は compensated elasticity とも呼ばれます.

例 C.2 (CRRA Utility)**.**

$$u(c,h) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} - \psi \frac{h^{1+\frac{1}{\gamma}}}{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

$$\eta^M_{h,w} = \frac{1-\sigma(1-s)}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}.$$

- 代替効果: $\eta^H_{h,w} = \frac{1}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}$
- 所得効果: $\eta_{h,I}\frac{wh}{I} = -\frac{\sigma-\sigma s}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}$

ここで $s = \frac{I}{c}$ とおいた.

Proof. Intra-temporal な最適条件より,

$$c^{-\sigma} w = \psi h^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{C.2}$$

対数をとって, $\log w$ で微分すると,

$$-\sigma \frac{\partial \log c}{\partial \log w} + 1 = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \log h}{\partial \log w}. \tag{C.3}$$

予算制約 $\log c = \log(wh + I)$ を $\log w$ で微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log c}{\partial \log w} &= \frac{1}{wh+I}\frac{\partial (wh+I)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \log w} \\
&= \frac{wh}{wh+I}\left(1+\frac{\partial \log h}{\partial \log w}\right) \\
&= (1-s)\left(1+\frac{\partial \log h}{\partial \log w}\right).
\end{aligned}$$

これを 式 C.3 に代入すると,

$$\eta^M_{h,w} = \frac{\partial \log h}{\partial \log w} = \frac{1-\sigma(1-s)}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}.$$

式 C.2 の対数を取って, $\log I$ で微分すると,

$$-\sigma\frac{\partial \log c}{\partial \log I} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \log h}{\partial \log I}. \tag{C.4}$$

予算制約 $\log c = \log(wh + I)$ を $\log I$ で微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log c}{\partial \log I} &= \frac{1}{wh+I}\frac{\partial (wh+I)}{\partial \log I} \\
&= \frac{1}{wh+I}\left(wh\frac{\partial \log h}{\partial \log I}+I\right) \\
&= \frac{1}{c}\left((c-I)\frac{\partial \log h}{\partial \log I}+I\right) \\
&= (1-s)\frac{\partial \log h}{\partial \log I}+s.
\end{aligned}$$

これを 式 C.4 に代入すると,

$$\eta_{h,I} = \frac{\partial \log h}{\partial \log I} = -\frac{\sigma s}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}.$$

スルツキーの恒等式より,

$$\begin{aligned}
\eta^H_{h,w} &= \eta^M_{h,w} - \eta_{h,I}\frac{wh}{I} \\
&= \frac{1-\sigma(1-s)}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)} + \frac{\sigma s}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}\left(\frac{1}{s}-1\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\gamma}+\sigma(1-s)}.
\end{aligned}$$

□

Frisch Elasticity

Frisch 弾力性は, 消費の限界効用を一定にした下での労働供給の弾力性として定義されます. また, しばしば lifetime wealth に対する限界効用を一定にした下での労働供給の弾力性としても定義されます. これは恒常所得仮説 (permanent income hypothesis) に基づくと, 消費の限界効用が lifetime wealth のみに依存すると考えるためです.

直感的には, 一時的な賃金の上昇は lifetime wealth にほとんど影響を与えないため, Frisch 弾力性は一時的な賃金変動に対する労働供給の反応を捉えると考えられます. そのため, RBC モデルなどで確率過程に基づく賃金変動が考慮される場合, Frisch 弾力性が重要な役割を果たします.

一階条件から, ラグランジュ乗数は $\lambda = u_c(c, h)$ であり, Frish 弾力性はこの λ を一定にした下での労働供給の弾力性として定義されます. すなわち, $u_h(c, h) = -\lambda w$ より,

$$u_{cc}\frac{\partial c}{\partial w} + u_{ch}\frac{\partial h}{\partial w} = 0 \text{ and } u_{hc}\frac{\partial c}{\partial w} + u_{hh}\frac{\partial h}{\partial w} = -\lambda.$$

これを $\frac{\partial h}{\partial w}$ について解くと,

$$\frac{\partial h}{\partial w} = \frac{u_h}{u_{hh} - \frac{u_{ch}^2}{u_{cc}}}\frac{1}{w}.$$

Frisch 弾力性 $\eta^F_{h,w} := \frac{\partial h}{\partial w}\frac{w}{h}|_\lambda$ より,

$$\eta^F_{h,w} = \frac{u_h}{h\left(u_{hh} - \frac{u_{ch}^2}{u_{cc}}\right)}.$$

なお, この式から自明に 例 C.2 において $\eta^F_{h,w} = \gamma$ となります. Chetty et al. (2011) はメタ分析を行い, Frisch 弾力性の平均的な推定値を報告しました.

- **ミクロ分析** (擬似実験, quasi-experiment): 0.82
- **マクロモデル**: 2.84

マクロモデルの結果は, RBC モデルなどで雇用は実質賃金よりも volatile であることを反映しています. この「マクロモデルの Frisch 弾力性はミクロ分析よりもかなり大きい」という Puzzle に関しては今も議論が続いています (e.g., Erosa, Fuster, and Kambourov (2016)).

C.3 Root Finding

定常状態の計算や, 一階条件から解を求める際, 数値的に非線形方程式の根を求める必要があります. ここではその基礎である一変数の非線形方程式の根の探索方法を紹介します.

例えば以下の最適化問題を考えてみましょう.

$$\max_{c,l} \frac{c^{1-\gamma_c}}{1-\gamma_c} + \alpha_l \frac{l^{1-\gamma_l}}{1-\gamma_l} \quad \text{s.t.} \quad c = w(1-l) \tag{C.5}$$

この問題は以下の一階条件の解を求めることで解くことができます.

$$w^{1-\gamma_c}(1-l)^{-\gamma_c} - \alpha_l l^{-\gamma_l} = 0.$$

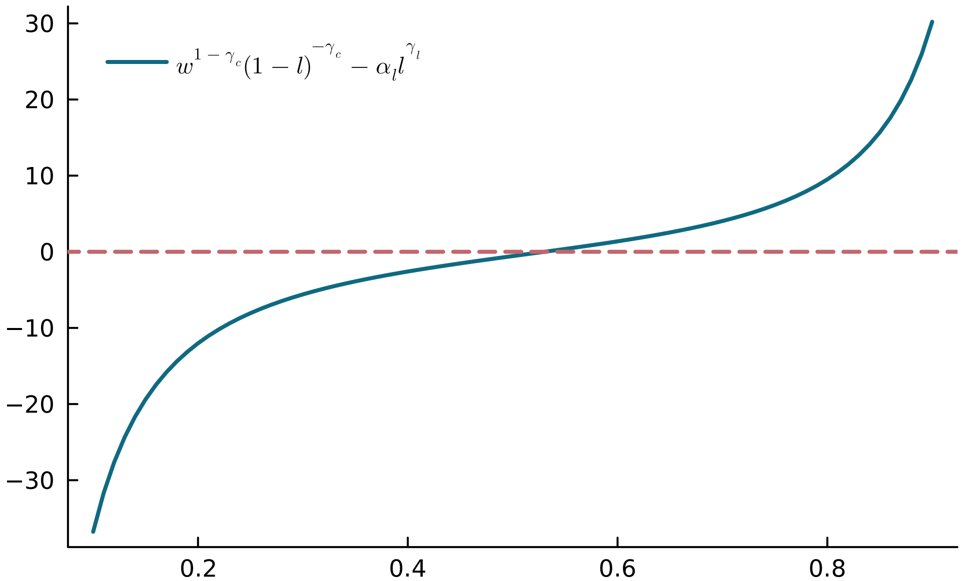


図 C.2: FOC for CRRA utility

これは, 一般に解析解がありません ($\gamma_c = \gamma_l = 1$ などを除く.) そのため, 数値計算を用いて解く必要があります. この様な一変数の非線形方程式 $f(x) = 0$ の解法として, 以下の 2 つの選択肢があります.

1. **Non-bracketing method**: 初期値 x_0 からスタートして, $f(x_n)$ が十分 0 に近づくまで反復的に計算. (ニュートン法など)
2. **Bracketing method**: 区間 $[a, b]$ を選び, 区間を狭めていくことで解を求める. (二分法など)

一般に, Non-bracketing method は収束が速い代わりにその収束は保証されません. 一方で, Bracketing method は収束がわずかに遅い代わりに, 解が存在する区間を保証することができます. 以下では, その理由とそれぞれの適した利用場面を解説します.

C.3.1 Non-bracketing Methods

Non-bracketing method は基本的には一階微分を利用し, 初期値 x_0 からスタートして反復的に解を求めます. ここでは, 最も古典的で簡単なニュートン法を紹介します.

ニュートン法

1. 初期値 x_0 を選ぶ. また停止条件として十分小さい $\epsilon > 0$ を選ぶ.
2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ を計算する.
3. $|f(x_{n+1})| < \epsilon$ ならば停止し, x_{n+1} を解として返す. そうでなければ, $n \leftarrow n+1$ として 2 に戻る.

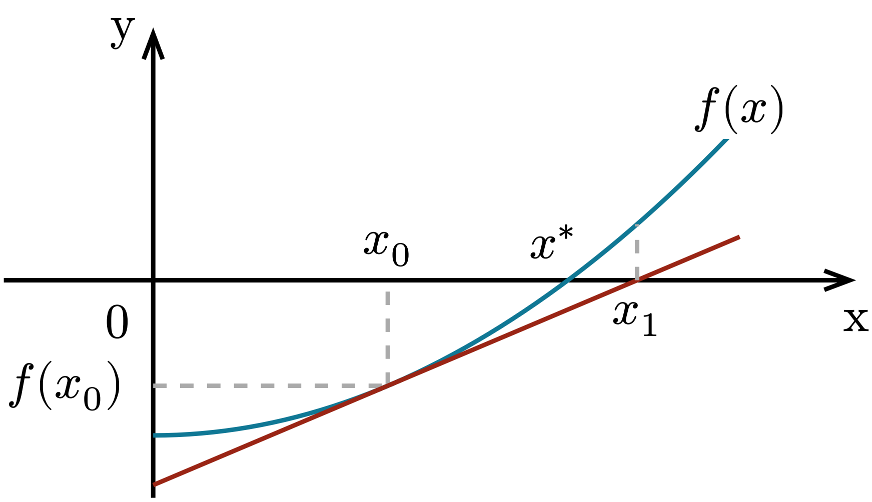


図 C.3: Visualization of Newton Method

```
0.530349570343484
```

Hybrid method

Julia の `Roots.jl` のデフォルトの Non-bracketing method (`Order0()`) は, 厳密には Bracketing method も一部利用します. また一階微分も必要としないため, より汎用的に利用することができます. ただし, 収束が速く収束が保証されない性質は Non-bracketing method と同じです.

```
0.530349570343484
```

定義域の変換

Non-bracketing method では, x_{n+1} の値を更新する際に, 必ずしも x_{n+1} が定義域内にあることが保証されません. 例えば, 今回の例では余暇時間ですので, $l \in (0,1)$ ですが, 初期値や関数形によっては, $l < 0$ や $l > 1$ となる可能性があります.

この場合, 端点解が存在するかどうかを確認する必要があります. 端点解が想定される場合は, 次節で説明するように Bracketing method を利用することが適しています. 今回の例では, 端点解が存在しないため ($l = 0, 1$ のどちらにおいても効用が負の無限大に発散するため), Non-bracketing method での解の収束が保証されています. 以下の様な定義域の変換を用いることで, 解の収束を保証することができます.

定義域の変換

x が区間 (a, b) で定義されるとき, 以下の変換を用いて定義域を $(-\infty, \infty)$ にすることができる.

$$x = \frac{a + b\exp y}{1 + \exp y}$$

明らかに, $y \to -\infty$ のとき $x \to a$, $y \to \infty$ のとき $x \to b$ となる.

今回の例では, $l = \frac{1}{1+\exp(y)}$ (つまりシグモイド関数) という変換を用いることができます.

```
0.530349570343484
```

C.3.2 Bracketing Methods

Bracketing method は, 解が存在する区間 $[a, b]$ を選び, その区間を狭めていくことで解を求めます. ここでは最も基本的な二分法を用いることで解を求めることができます.

二分法

1. 区間 $[a, b]$ を選ぶ. また停止条件として十分小さい $\epsilon > 0$ を選ぶ.
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$ ならば, $c = \frac{a+b}{2}$ を計算する.
3. $|f(c)| < \epsilon$ ならば, c を解として返す. そうでなければ, $f(a) \cdot f(c) < 0$ ならば, $b \leftarrow c$ として 2 に戻る. そうでなければ, $a \leftarrow c$ として 2 に戻る.

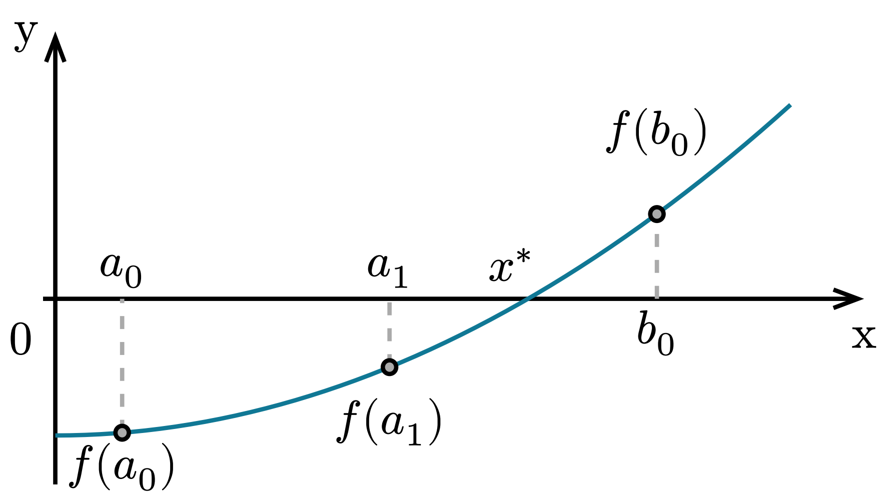


図 C.4: Visualization of Bisection Method

例えば, 今回の例では $l \in (0, 1)$ ですので, $l = 0$ と $l = 1$ で効用が発散することから, 解が存在する区間は $(0, 1)$ です. なお, 端点で FOC が定義されてない場合も多いので, 端点より微小に内側の区間を選ぶことが多いです.

```
0.530349570343484
```

端点解の存在

以下の様なカップルの意思決定問題を考えてみましょう.

$$\max_{c_m, c_f, l_m, l_f} u(c_m, l_m) + u(c_f, l_f) \tag{C.6}$$

subject to

$$c_m + c_f = w_m(1 - l_m) + w_f(1 - l_f).$$

一階条件から以下の関係が導けます:

$$\frac{l_m}{l_f} = \left(\frac{w_f}{w_m}\right)^{\frac{1}{\gamma_l}}.$$

この関係から一方の相対賃金が十分に大きい場合, 例えば $w_m \gg w_f$ の場合, $l_f > 1$ となる可能性があります (l_m は余暇時間のため, 0 よりある程度大きい値をとるということが想像できます.) 内点解が存在する場合の l_f に関する一階条件は以下のようになります.

$$w_m\left(1 - \left(\frac{w_f}{w_m}\right)^{\frac{1}{\gamma_l}} l_f\right) + w_f(1 - l_f) - 2\left(\frac{w_f}{\alpha_l}\right)^{\frac{1}{\gamma_c}} l_f^{\frac{\gamma_l}{\gamma_c}} = 0.$$

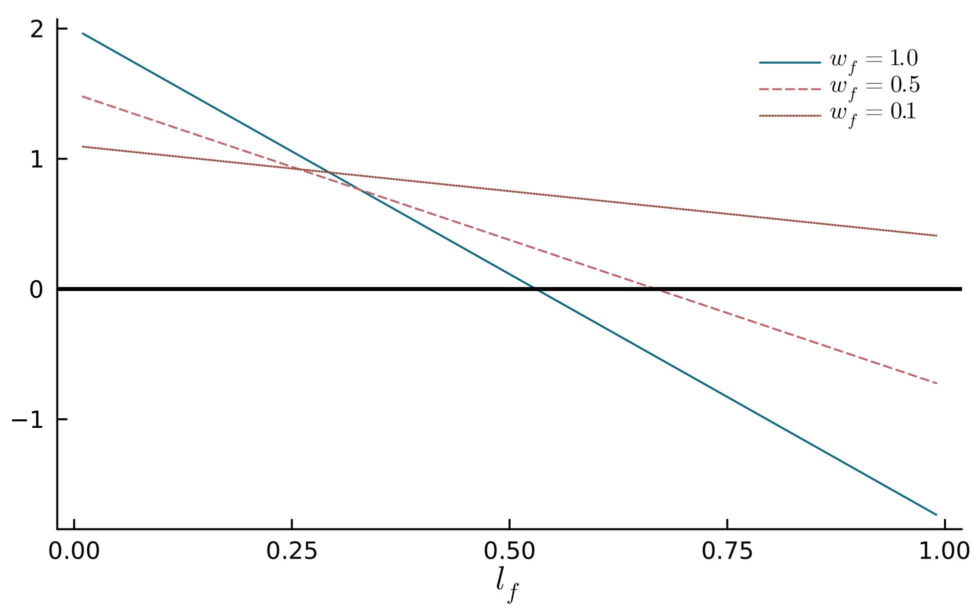


図 C.5: **FOC for bargaining problem.** $w_m = 1.0, \alpha_l = 1.2, \gamma_c = \gamma_l = 1.5.$

また, $l_f = 1$ における一階条件は以下のようになります.

$$w_m(1 - l_m) - 2\left(\frac{w_m}{\alpha_l}\right)^{\frac{1}{\gamma_c}} l_m^{\frac{\gamma_l}{\gamma_c}} = 0.$$

この様な場合, Bracketing method の考えが有効です.

1. 端点 $l_m = 0, 1$ (実用上は $\epsilon, 1 - \epsilon$) において, 一階条件の値を計算.
2. 一階条件の値が異符号であれば, 二分法を用いて解を求める.
3. 一階条件の値が同符号であれば, 端点解 (この場合, $l_f = 1$) 上の解を求める.

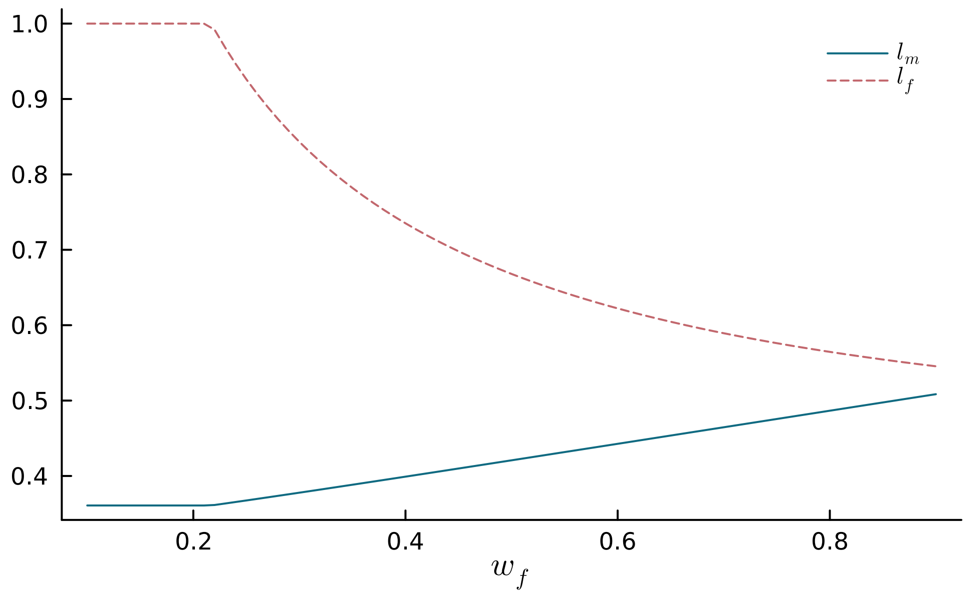


図 C.6: **Solution of bargaining problem.** $w_m = 1.0, \alpha_l = 1.2, \gamma_c = \gamma_l = 1.5$.

参考文献

Adam, Klaus, and Roberto M. Billi. 2007. "Discretionary Monetary Policy and the Zero Lower Bound on Nominal Interest Rates." *Journal of Monetary Economics* 54 (3): 728–52. https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2005.11.003.

Aiyagari, S. Rao. 1994. "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving." *The Quarterly Journal of Economics* 109 (3): 659–84. https://doi.org/10.2307/2118417.

Andolfatto, David. 1996. "Business Cycles and Labor-Market Search." *The American Economic Review* 86 (1): 112–32. https://www.jstor.org/stable/2118258.

Ascari, Guido, and Lorenza Rossi. 2012. "Trend Inflation and Firms Price-Setting: Rotemberg Versus Calvo." *The Economic Journal* 122 (563): 1115–41. https://doi.org/10.1111/j.1468-0297.2012.02517.x.

Azzimonti, Marina, Per Krusell, Alisdair McKay, and Toshihiko Mukoyama. 2025. *Macroeconomics*.

Baxter, Marianne, and Robert G. King. 1999. "Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series." *The Review of Economics and Statistics* 81 (4): 575–93. https://www.jstor.org/stable/2646708.

Boppart, Timo, and Per Krusell. 2020. "Labor Supply in the Past, Present, and Future: A Balanced-Growth Perspective." *Journal of Political Economy* 128 (1): 118–57. https://doi.org/10.1086/704071.

Bullard, James, and Kaushik Mitra. 2002. "Learning about Monetary Policy Rules." *Journal of Monetary Economics* 49 (6): 1105–29. https://doi.org/10.1016/S0304-3932(02)00144-7.

Calvo, Guillermo A. 1983. "Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework." *Journal of Monetary Economics* 12 (3): 383–98. https://doi.org/10.1016/0304-3932(83)90060-0.

Chetty, Raj, Adam Guren, Day Manoli, and Andrea Weber. 2011. "Are Micro and Macro Labor Supply Elasticities Consistent? A Review of Evidence on the Intensive and Extensive Margins." *American Economic Review* 101 (3): 471–75. https://doi.org/10.1257/aer.101.3.471.

Cooley, Thomas F., and Edward C. Prescott. 1995. "Economic Growth and Business Cycles." In *Frontiers of Business Cycle Research*, edited by Thomas F. Cooley, 1–38. Princeton University Press. https://doi.org/10.2307/j.ctv14163jx.7.

Erosa, Andrés, Luisa Fuster, and Gueorgui Kambourov. 2016. "Towards a Micro-Founded Theory of Aggregate Labour Supply." *The Review of Economic Studies* 83 (3): 1001–39. https://doi.org/10.1093/restud/rdw010.

Galí, Jordi. 2015. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications*. Second edition. Princeton Oxford: Princeton University Press.

Goldberg, Pinelopi, and Rebecca Hellerstein. 2007. "Sticky Prices: Why Firms Hesitate to Adjust the Price of Their Goods." *Current Issues in Economics and Finance* 13 (10).

Hagedorn, Marcus, and Iourii Manovskii. 2008. "The Cyclical Behavior of Equilibrium Unemployment and Vacancies Revisited." *American Economic Review* 98 (4): 1692–1706. https://doi.org/10.1257/aer.98.4.1692.

Karabarbounis, Loukas, and Brent Neiman. 2014. "The Global Decline of the Labor Share." *The Quarterly Journal of Economics* 129 (1): 61–103. https://doi.org/10.1093/qje/qjt032.

King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio T. Rebelo. 1988. "Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model." *Journal of Monetary Economics* 21 (2): 195–232. https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90030-X.

Krusell, Per, Toshihiko Mukoyama, and Ayşegül Şahin. 2010. "Labour-Market Matching with Precautionary Savings and Aggregate Fluctuations." *Review of Economic Studies* 77 (4): 1477–507. https://doi.org/10.1111/j.1467-937X.2010.00700.x.

Kydland, Finn E., and Edward C. Prescott. 1982. "Time to Build and Aggregate Fluctuations." *Econometrica* 50 (6): 1345–70. https://doi.org/10.2307/1913386.

Lucas, Robert E. 1977. "Understanding Business Cycles." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 5 (January): 7–29. https://doi.org/10.1016/0167-2231(77)90002-1.

Merz, Monika. 1995. "Search in the Labor Market and the Real Business Cycle." *Journal of Monetary Economics* 36 (2): 269–300. https://doi.org/10.1016/0304-3932(95)01216-8.

Müller, Karsten, Chenzi Xu, Mohamed Lehbib, and Ziliang Chen. 2025. "The Global Macro Database: A New International Macroeconomic Dataset."

Prescott, Edward C. 1986. "Theory Ahead of Business Cycle Measurement." *Quarterly Review* 10 (4). https://doi.org/10.21034/qr.1042.

Rotemberg, Julio J. 1982. "Sticky Prices in the United States." *Journal of Political Economy* 90 (6): 1187–1211. https://doi.org/10.1086/261117.

Shimer, Robert. 2005. "The Cyclical Behavior of Equilibrium Unemployment and Vacancies." *American Economic Review* 95 (1): 25–49. https://doi.org/10.1257/0002828053828572.

Taylor, John B. 1993. "Discretion Versus Policy Rules in Practice." *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 39 (December): 195–214. https://doi.org/10.1016/0167-2231(93)90009-L.

北尾早霧, 砂川武貴, and 山田知明. 2024. **定量的マクロ経済学と数値計算**. 日本評論社.